איך לחתוך את הסנדוויץ'

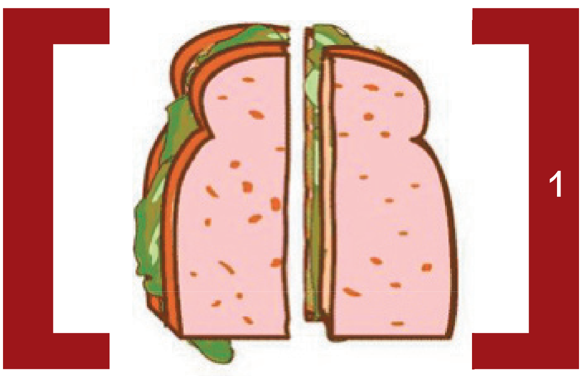
על גאומטריה חישובית ויישומיה

מאת: גיורא אלכסנדרון

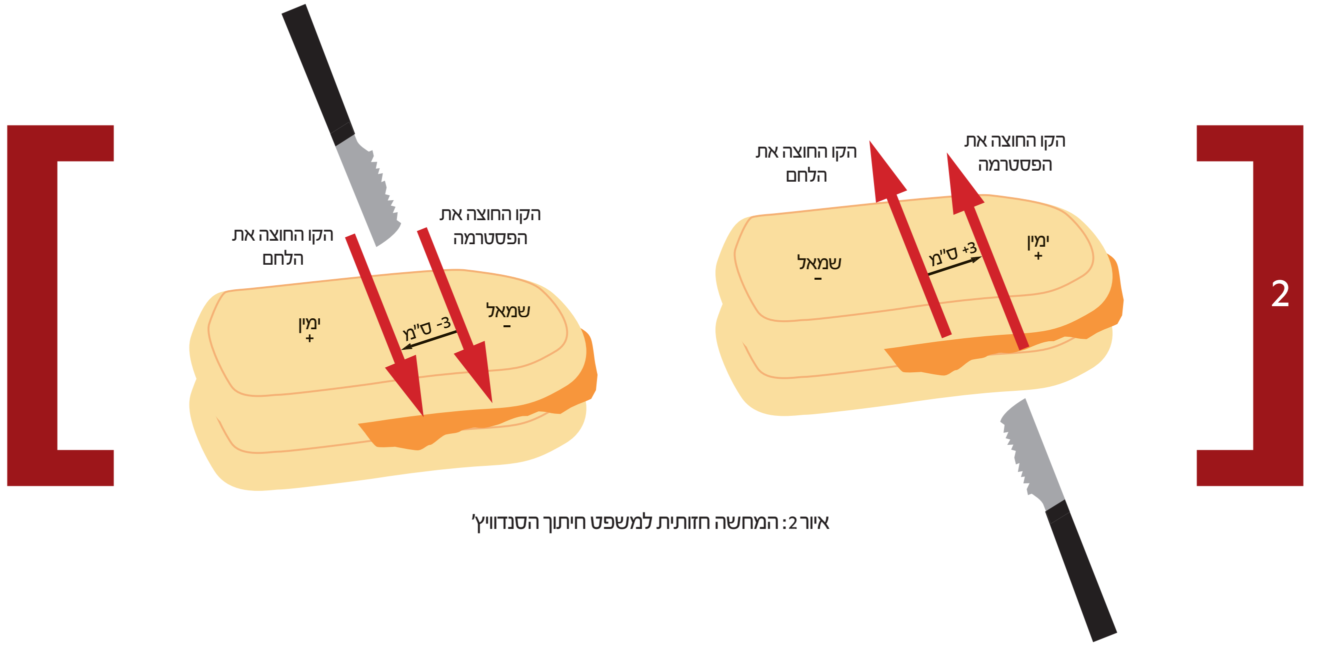
תארו לכם שהכנתם לעצמכם כריך נהדר – לחם כפרי, פסטרמה ומלפפון חמוץ, ועכשיו מגיע חבר ואתם נאלצים לחלק אותו ביניכם. בעיה מוכרת וכאובה, שבגאומטריה נמצא לה פתרון, בדמותו של **משפט חיתוך הסנדוויץ'** (Ham Sandwich Theorem).

המשפט (בגרסתו הכשרה) אומר שאפשר תמיד לחתוך בחיתוך ישר כריך של פסטרמה ומלפפון חמוץ לשני חלקים המכילים כמויות שוות של פסטרמה, מלפפון חמוץ ולחם, וזאת בלא תלות בצורת הרכיבים או בדרך שבה הם מסודרים בכריך (איור 1). חיתוך כזה יחלק כל אחד מהרכיבים לשני חלקים שווים בכמותם, אם כי כמובן, לא בהכרח זהים בצורתם. אפשר להשתמש במספר פרוסות כרצוננו, ולמעשה, אפילו אם נעביר את הכריך בבלנדר, חלוקה כזאת תהיה עדיין אפשרית.

ננסה להבין את הוכחת המשפט באופן אינטואיטיבי. נתייחס ללחם ולפסטרמה בלבד. נניח שהנחנו את הכריך על שולחן מטבח, ושאנו אוחזים בסכין כך שלהבו מאונך למשטח השולחן והסכין כולו ניצב לדופן השולחן הקרובה אלינו (איור 2). על-ידי הזזת הסכין בציר אחד בלבד, ימינה ושמאלה, אפשר למצוא נקודת חיתוך שבה ייחצה הלחם. בנקודה אחרת תיחצה הפסטרמה. נדמיין את הקו שמצייר כל חיתוך על הכריך, וניתן לו כיוון מהקת קדימה, כלומר כלפי צדו האחר (המרוחק) של השולחן. שני הקווים הם כעת חצים מקבילים הפונים אל הצד המרוחק של השולחן. עתה נסתכל על המרחק בין הקו החוצה את הלחם והקו החוצה את הפסטרמה. נניח שהקו החוצה את הפסטרמה נמצא **מימין** לקו החוצה את הלחם, במרחק של 3 ס"מ. עתה נהפוך את הסכין כך שהוא יצביע בדיוק עלינו, ונשוב ונסמן שני קווים, אחד החוצה את הלחם והאחר החוצה את הפסטרמה. ברור שהקווים יהיו במיקום זהה, אלא שכיוונם הפוך. כלומר, מנקודת ראותו של הקו החוצה את הלחם, הקו החוצה את הפסטרמה הוא עכשיו 3 ס"מ **משמאלו**. אם נסמן ימינה כפלוס ושמאלה כמינוס, אזי במהלך סיבוב הסכין הפונקציה המתארת את המרחק בין שני הקווים עברה מ-3+ ל-(3-). מכיוון שהפונקציה רציפה, נובע מכך שישנה נקודה שבה פונקציית המרחק שווה 0, כלומר נקודה שבה שני הקווים מתמזגים. טיעון דומה בתלת-ממד, הכולל גם את המלפפון ושבו שינוי הזווית מתבצע בשני



איור 1: כריך חצוי



איור 2: המחשה חזותית למשפט חיתוך הסנדוויץ'

ממדים, מוכיח את המשפט.

בהמשך הוכלל המשפט מהוכחה במרחב תלת-ממדי למשפט כללי על חציית קבוצות בממדים גבוהים. הכריך הוא מקרה פרטי של תלת-ממד. מן ההכללה נובע, למשל, שבכריך ארבע-ממדי אפשר להוסיף גם חסה, אך אז יש לחתכו על-ידי מרחב תלת-ממדי. זהו משפט אופייני בגאומטריה חישובית, תחום מרתק בתיאוריה של מדעי המחשב, שהאתגרים בו משלבים הבנה מתמטית עם ויזואליזציה ודמיון גרפי מפותח.

הגאומטריה החישובית עוסקת בהיבטים החישוביים של בעיות המוגדרות במונחים גאומטריים. הדחיפה העיקרית להתפתחות התחום כתחום נפרד במדעי המחשב הגיעה מההתפתחות בתחומים כגון גרפיקה ממוחשבת ותכנון ממוחשב (CAD), תחומים המעמידים בעיות שכדי לפתור אותן בצורה יעילה יש צורך בייצוג ממוחשב של העולם התלת-ממדי או הדו-ממדי. ואולם, טבעה של החשיבה המתמטית לחפש את ההכללה. הבעיות מקבלות צורה תיאורטית, וקשרים חדשים נוצרים או מתגלים. בדרך זו, כלים מתמטיים שנוצרו עבור בעיות גאומטריות נתגלו כשימושיים בתחומים שלכאורה אין להם קרבה לגאומטריה; כך למשל במקרה הכריך, שבו המשפט הכללי התגלה כשימושי בתחומים כגון בסיסי נתונים וחקר ביצועים.

נסקור כאן כמה מהבעיות המרכזיות בתחום, כגון בעיית המוזיאון ובעיית הדואר, ונתוודע לפתרונות מעניינים לבעיות אלו וליישומיהן בתחומים כגון ראייה ממוחשבת, גרפיקה ותקשורת.

איך לשמור על המונה ליזה במינימום שומרים?

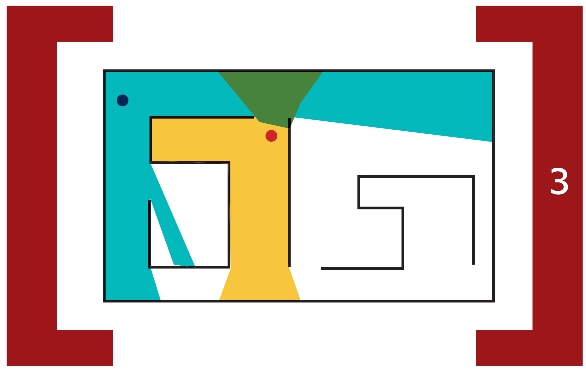
תארו לעצמכם שאתם מנהלים מוזיאון, ועליכם להציב בתוכו שומרים כך שכל נקודה במוזיאון תהיה בתחום תצפית של שומר אחד לפחות. בד בבד, כדי לחסוך בהוצאות אתם מעוניינים לשכור מינימום שומרים. בעיה זו ידועה כ**בעיית המוזיאון** (Art Gallery Problem), והיא בעיה קלאסית של נראוּת (visibility). מכיוון ששומרים ומוזיאון אינם מושגים גאומטריים, יש לפשט את הבעיה ולהציגה במונחים גאומטריים בסיסיים, כקווים ונקודות. הפשטה כזו נחוצה משתי סיבות עיקריות: ראשית, היא מפרידה בין עיקר לטפל; שנית, היא מעבירה את הבעיות לעולם שבו הייצוג אחיד ומתומצת.

בבעיית המוזיאון שלושה רכיבים המהווים את לב הבעיה: מבנה המוזיאון, השומרים ותחום התצפית שלהם. המוזיאון מיוצג כתרשים דו-ממדי, ומורכב מאוסף של מצולעים (חלקם אולי פתוחים). השומרים מיוצגים באמצעות נקודות. מניחים שכל שומר מסוגל לראות סביב-סביב, 360°, אך לא מבעד לקירות (איור 3). כעת הבעיה מיוצגת במונחים גאומטריים בסיסיים,

> גאומטריה חישובית היא תחום מרתק בתיאוריה של מדעי המחשב, שהאתגרים בו משלבים הבנה מתמטית עם ויזואליזציה ודמיון גרפי מפותח

ואפשר להוריד מהמדף הגאומטרי גישות וכלים כדי להתמודד איתה. כלים כאלה יאפשרו לנתח את התחום הנראה מכל נקודה, ולמצוא מספר מזערי של נקודות שכל התרשים נמצא בתחום הנראוּת שלהן. בעיות כגון בעיית המוזיאון אופייניות מאוד לתחומים של ראייה ממוחשבת וגרפיקה (כגון משחקי מחשב שבהם משתתף נע בחדר והמחשב צריך להבין מה הוא רואה ומי רואה אותו). פעמים רבות אלו בעיות שזמן החישוב שלהן ארוך מאוד. כמו כן, שינוי במיקום עשוי לשנות בצורה מהותית את

שדה הראייה (למשל, מעבר ליד דלת), דבר הגורר עדכון יקר. זוהי אחת הסיבות לכך שמשחקי מחשב שיש בהם גרפיקה מורכבת דורשים רכיבי חומרה ותוכנה מהירים ומתוחכמים מאוד.



איור 3: מוזיאון. הקווים השחורים מייצגים קירות ויוצרים מפה דו-ממדית של המוזיאון. הנקודה הכחולה והנקודה האדומה מייצגות את השומרים, והאזורים הצבועים מייצגים את השטח שבו הם צופים (חלק מהשטח נמצא בטווח התצפית של שני השומרים). כרגע המוזיאון אינו מאובטח בשלמותו

על חלוקת דואר ושיטת הנמלה

בפיתוח אלגוריתם לפתרון בעיה גאומטרית, לב העניין הוא מציאת ההבחנות הגאומטריות הנכונות, שבהסתמך עליהן אפשר לפתור את הבעיה בצורה יעילה. הבה ונבחן את הבעיה שלהלן, הידועה בשם **בעיית הדואר** (Post Office Problem), שהציג המתמטיקאי דונלד קנות' (Knuth): בהינתן N סניפי דואר מפוזרים במישור, ובית, איך נקבע איזהו סניף הדואר הקרוב ביותר לבית זה (או בגרסה האמריקנית – איך נמצא את סניף מקדונלד'ס הקרוב ביותר...)?

אחד הפתרונות היעילים לבעיה מתבסס על חישוב דיאגרמת וורונוי (Voronoi) של סניפי הדואר. בהינתן אוסף של אתרים במישור, דיאגרמת וורונוי היא חלוקה של המישור לתאים, כך שכל תא מכיל את אחד האתרים ואת אוסף כל הנקודות במישור שאתר זה הוא הקרוב אליהן ביותר. איך עוזרת חלוקה כזו בחלוקת דואר? נניח שקיבלנו את מיקומם במפה של סניפי הדואר, ואנו מעוניינים להתכונן לשאילתות על בתים. סניפי הדואר יהיו האתרים שסביבם נבנה את דיאגרמת וורונוי. בהינתן מיקום של בית ספציפי, כל שנותר הוא לקבוע במהירות לאיזה תא הוא שייך. תיאור זה כולל בתוכו שתי בעיות אלגוריתמיות: האחת – איך מחשבים דיאגרמת וורונוי? והאחרת – בהינתן נקודה, איך מוצאים במהירות את התא שאליו היא שייכת (בעיה זו ידועה כ-point location)? נענה כאן על הראשונה בלבד (לגבי השנייה, מי שסקרן מוזמן לפנות לקישורים בסוף המאמר).

ישנם אלגוריתמים רבים לחישוב דיאגרמת וורונוי. נתאר אלגוריתם רקורסיבי שהציעו שיימוס והוי (Shamos and Hoey) בשנת 1975. האלגוריתם פועל בשיטת "הפרד ומשול", שהיא אחת התבניות האלגוריתמיות החשובות ביותר במדעי המחשב: חלק את הקלט לקבוצות משנה (לרוב שתיים), פתור את הבעיה על הקבוצות הללו על-ידי הפעלה חוזרת של האלגוריתם עליהן, ואחֵד את התוצאות. אם נבחן את השלבים בתהליך החישוב, הפירוק ממשיך עד שהקבוצות מגיעות לגודל כזה שכבר אין צורך להמשיך לפרק אותן, כיוון שפתרון הבעיה עבורן הוא מיידי (לרוב זה קורה כשבקבוצה נשאר איבר אחד, שממילא אינו פריק). גודל זה נקרא "תנאי העצירה". בשלב זה האלגוריתם מתחיל לאחד את התוצאות, כאשר כל רמה מאחדת את התוצאות של הרמות שמתחתיה. מכאן, תיאור של אלגוריתם "הפרד ומשול" רקורסיבי צריך לכלול שלושה רכיבים – כיצד מתבצע הפירוק, מהו תנאי העצירה והפתרון המיידי על קבוצה שעבורה התנאי מתקיים, וכיצד נעשה האיחוד.

בטרם נתאר את שלושת השלבים הנ"ל באלגוריתם, נבחן ממה מורכבת דיאגרמת וורונוי. דיאגרמת וורונוי של נקודה אחת מורכבת מתא אחד, שהוא כל המישור. דיאגרמה של שתי נקודות מורכבת משני תאים המופרדים על-ידי אנך האמצעים לקטע המחבר את שתי הנקודות (אנך אמצעים הוא ישר המאונך לקטע וחוצה אותו. ראו איור 4). דיאגרמה כללית מורכבת מאוסף של תאים, כאשר כל תא הוא מצולע קמור, שהקטעים התוחמים אותו הם חלק מאנכי אמצעים של ישרים המחברים שתי נקודות (מצולע קמור הוא מצולע שאם "נטייל" על צלעותיו עם כיוון השעון, כל הפניות יהיו ימינה. מגן דוד, למשל, אינו מצולע קמור).

בהסתמך על כך, האלגוריתם פועל כדלקמן:

פירוק: כל עוד הקבוצות מכילות יותר מאיבר אחד, חלק את הקבוצה לשתי קבוצות: חצי הנקודות הימניות (נתייחס אליהן כ"שחורות"), וחצי הנקודות השמאליות ("האדומות").

תנאי העצירה הוא קבוצה בגודל 1. לקבוצה בגודל 1 הפתרון הוא מיידי – דיאגרמת וורונוי של נקודה אחת מכילה, כאמור, תא אחד שהוא כל המישור.

> בעיות כגון בעיית המוזיאון אופייניות מאוד לתחומים של ראייה ממוחשבת וגרפיקה, כגון משחקי מחשב שבהם משתתף נע בחדר והמחשב צריך להבין מה הוא רואה ומי רואה אותו

איחוד: איחוד של שתי דיאגרמות, כאשר כל הנקודות באחת הדיאגרמות נמצאות מימין לכל הנקודות בדיאגרמה האחרת.

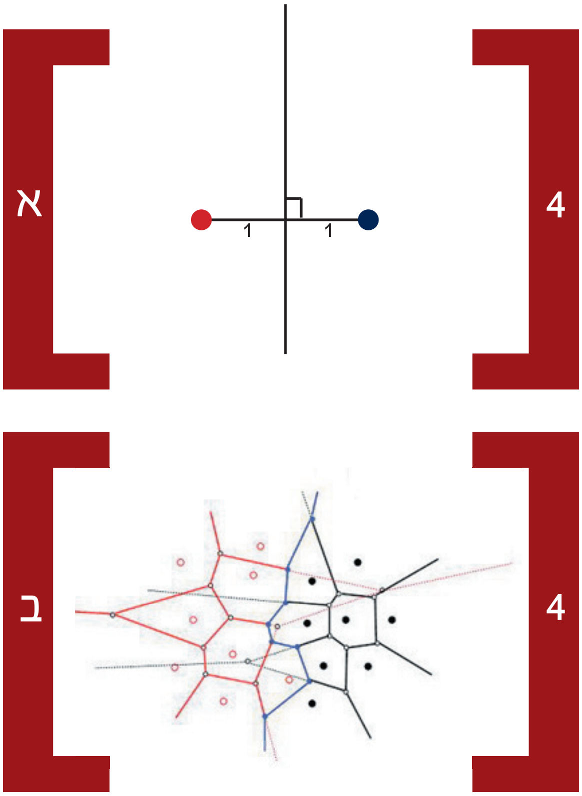
האיחוד יכול להיעשות בשיטת "מעקב הנמלה": נעקוב אחרי נמלה המתחילה ללכת ממינוס אינסוף (ביחס לציר Y), ורוצה ללכת למעלה בין הנקודות השחורות לאדומות עד לפלוס אינסוף, תוך שהיא שומרת על מרחק מרבי מהנקודה הקרובה אליה ביותר. נקרא לדיאגרמה של הנקודות השחורות "הדיאגרמה השחורה" ולדיאגרמה של הנקודות האדומות "הדיאגרמה האדומה". למסלול שהנמלה מציירת נקרא "המסלול הכחול". שתי הדיאגרמות פרושות על כל המישור; המסלול הכחול מאחד אותן לדיאגרמה אחת (ראו איור 4ב). בדיאגרמה המאוחדת נמחקים כל הקטעים השחורים שמשמאל למסלול הכחול וכל הקטעים האדומים שמימין לו. הדיאגרמה המאוחדת מורכבת, אם כן, מהמסלול הכחול, מהחלק של הדיאגרמה השחורה שמימין למסלול, ומהחלק של הדיאגרמה האדומה שמשמאל לו.

כדי לממש את אלגוריתם האיחוד, יש לחשב את המסלול הכחול. המסלול מורכב מקטעים, כאשר כל קטע הוא חלק של אנך אמצעים לישר המחבר נקודה אדומה ושחורה, ותָחום על-ידי קטעים מהדיאגרמות השחורה והאדומה. לדוגמה, נסתכל באיור 4ב על הקטע התחתון במסלול הכחול. קטע זה הוא חלק מאנך האמצעים לישר המחבר את הנקודה הנמוכה מבין הנקודות האדומות עם הנקודה הנמוכה מבין הנקודות השחורות (האנך עצמו אינו מופיע בתרשים). הקטע מסתיים במפגש הראשון עם קטע מהדיאגרמות השחורה או האדומה, במקרה הזה האדומה, ובנקודה זו מתחיל הקטע הכחול הבא. למעשה, הקטע התחתון במסלול הכחול הוא **תמיד** חלק מאנך האמצעים לישר המחבר את שתי הנקודות הנמוכות (שחורה ואדומה). מכיוון שהוא הקטע היחיד (ביחד עם הקטע העליון) שאפשר לדעת מראש איזה זוג נקודות מגדיר אותו, מתחילים לחשב את המסלול הכחול ממנו, קטע אחרי קטע. החלק הקשה בחישוב כל קטע כחול הוא מציאת הקטע הראשון (אדום או שחור) שבו הוא יפגע בטיפוס, כלומר הקטע התוחם אותו מלמעלה. פגיעה בקטע אדום או שחור אומרת, למעשה, שאנחנו נכנסים ל"תחום ההשפעה" של נקודה חדשה, ולכן מכאן והלאה יש להתקדם לאורכו של אנך אמצעים חדש, עד לפגיעה הבאה.

בסוף התהליך, לאחר שסיימנו לאחד בכל הרמות, מתקבלת הדיאגרמה המלאה.

נוסף על דוגמת הדואר (שהיא, איך לומר, מעט מלאכותית), דיאגרמות וורונוי התגלו כאחד הכלים החשובים ביותר בגאומטריה חישובית. בגרסאות שונות משתמשים בהן במגוון אדיר של תחומים — בביולוגיה, למשל, הן משמשות לחישוב חלוקת השטח בין צמחים או בעלי-חיים מתחרים, בשיווק — חלוקת שטח בין חנויות, בתכנון חומרה — לחישוב אזורי השראה מגנטית, ועוד.

לדיאגרמות וורונוי היסטוריה ארוכה. את שמן קיבלו במאה



איור 4: (א) דיאגרמת וורונוי של שתי נקודות. (ב) הקו הכחול מתאר את מסלול הנמלה, והנקודות הכחולות מציינות מפגשים שלה עם קטעים בדיאגרמה האדומה או השחורה. במקווקו הקטעים שנמחקו – קטעים שחורים משמאל למסלול הכחול, וקטעים אדומים מימין לו

שעברה, לכבודו של המתמטיקאי האוקראיני גאורגי וורונוי (Voronoi), שב-1908 היה הראשון שהגדיר אותן בצורה פורמלית. עם זאת, כבר באמצע המאה ה-19 השתמש הרופא הבריטי ג'ון סנו (Snow) בתרשימים דומים, כדי להראות שרוב המתים במגפת הכולרה שתקפה את רובע הסוהו בלונדון היו קרובים למשאבת מים מסוימת יותר מלכל משאבה אחרת. מכך הסיק שמשאבה זו היא מקור הזיהום, והרשויות הפסיקו את פעולתה.

סדרות מתמטיות ומעקב אחר גופים בתנועה

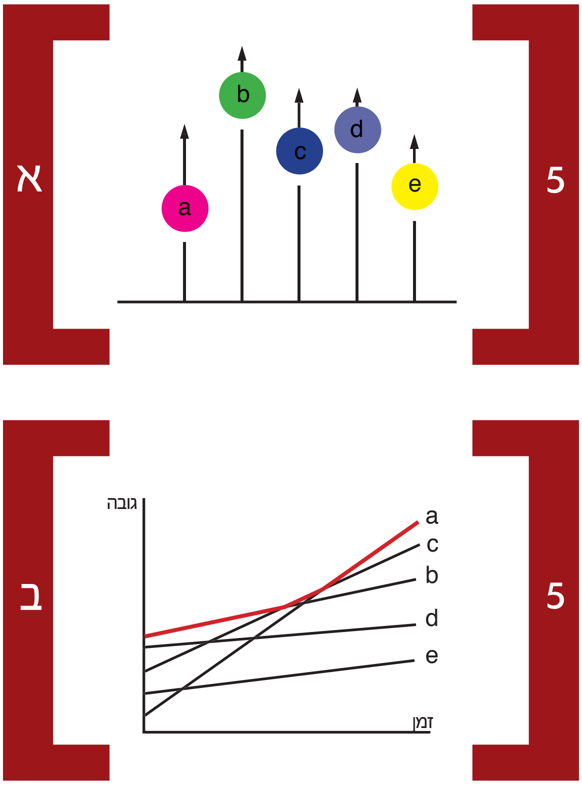
עבור רוב משתמשי המחשב, ההיכרות עם מגבלות החישוב של המכונה היא דרך תכונות החומרה של המחשב שקנו — מהירות המעבד, גודל הזיכרון וכו'. ואולם, רכיב התוכנה הוא-הוא הגורם המרכזי המשפיע על היעילות. לעתים שיפור קטן באלגוריתם שמאחורי תוכנה כלשהי ישפר את זמן הריצה שלה יותר משיוכל לעשות זאת כל שדרוג בחומרה. ניתוח יעילות של אלגוריתמים הוא אחד מתחומי המחקר החשובים במדעי המחשב, וההשוואה בין אלגוריתמים שונים לפתרון בעיה מסוימת נעשית על פי

יעילותם. מדד היעילות מכיל שני פרמטרים עיקריים – מספר החישובים שעל האלגוריתם לבצע, וצריכת הזיכרון שלו. לכן, תכנון של אלגוריתם כולל בחובו גם ניתוח של פרמטרים אלו, ופעמים רבות זהו החלק המורכב ביותר בתהליך. גם פה, הגאומטריה החישובית מתגלה ככלי עזר חשוב.

התחום המתפתח של שימושים מבוססי מיקום, כגון GPS, עוסק במעקב אחר מיקומם של מספר גדול מאוד של משתמשים

הבה נבחן את הבעיה שלהלן, הקשורה לבעיות שביסודו של התחום המתפתח של שימושים מבוססי מיקום (Geographic Information Systems), כגון GPS. שימושים כאלה עוקבים אחר מיקומם של מספר גדול מאוד של משתמשים. המעקב נעשה לצרכים שונים, הן של הלקוח והן של המערכת. משתמש ומיקומו יכולים להיות מאופיינים כנקודה נעה במישור XY, והמערכת עוקבת אחר תכונות שונות של קבוצת הנקודות המייצגות את המשתמשים. על סמך המיקום יכולה המערכת לזהות, למשל, אזורים שבהם מרוכז מספר גדול של נקודות (כמו בעת הפגנה בכיכר רבין), ולהפנות לשם משאבים, כגון תדרי שידור נוספים. אחת התכונות המעניינות מנקודת מבט מערכתית היא מיקומן של נקודות הקיצון. אוסף נקודות הקיצון מגדיר את גבולות הקבוצה, ואפשר לגזור ממנו תכונות שימושיות רבות, כגון המרחק המרבי בין שתי נקודות מהקבוצה (שחייב להיות בין שתי נקודות קיצון), ועוד. מאחר שהנקודות נעות, נקודות הקיצון עשויות להשתנות עם הזמן. מכיוון ששינויים בנקודות הקיצון עשויים לגרור חישובים רבים, אנו מעוניינים להעריך או לחסום את המספר המרבי של שינויי זהות של הנקודות הללו כדי לאמוד את היעילות של האלגוריתם העוקב אחריהן, ובדרך זו אולי אף לשפר אותו. כך גם נוכל להשוות בין אלגוריתמים שונים, להעריך מראש זמני ריצה מרביים וכו'.

כדי לפשט את הבעיה, נניח שאנו מתעניינים רק במספר השינויים בזהותה של הנקודה העליונה ביותר. מכיוון שכך, התכונה הרלוונטית לכל נקודה נעה היא מיקומה הנוכחי לאורך ציר ה-Y ומהירות התנועה שלה לאורכו. אפשר לחשוב על הבעיה כדלהלן: אוסף של בלונים מחוברים לקרקע בעזרת חוטים באורך שונה. ברגע מסוים מתנתקים כל החוטים, וכל הבלונים מתחילים לעוף כלפי מעלה, כל אחד במהירות שונה (איור 5א). אנו עוקבים בלא הרף אחר הבלון העליון, והשאלה היא כמה פעמים עשויה זהותו להשתנות. מאחר שגאומטריה אינה מכירה את מושג הזמן, נתייחס אליו כממד נוסף. נגדיר מישור שבו ציר ה-X הוא ציר הזמן וציר ה-Y הוא הגובה. עבור בלון מסוים, אם נסמן



איור 5: (א) הבלונים מיד לאחר הניתוק. כיוון החצים מסמן את כיוון התנועה, ואורכם את המהירות. (ב) גובה הבלונים לאורך הזמן. המעטפת העליונה (מודגשת) מורכבת מהתווים a, b, c

את מיקומו בכל רגע, נקבל קו רציף המתאר את גובה הבלון כפונקציה של הזמן. אוסף הבלונים מגדיר אוסף קווים. נבחן את המעטפת העליונה של הקווים (איור 5ב). כל קטע על המעטפת מגדיר תחום זמן שבו הבלון שאותו קו מייצג הוא הבלון העליון, ומספר השינויים בזהות הבלון העליון שווה למספר הקטעים שמהם מורכבת המעטפת העליונה ("סיבוכיות המעטפת"). לכן, אם נדע לחסום את מספר הקטעים במעטפת העליונה, נקבל חסם למספר השינויים בזהות הבלון העליון. מעטפות עליונות מהוות רכיב מרכזי בשאלות גאומטריות רבות, ומחקרים רבים עוסקים בהן. חסם עליון לסיבוכיותה של מעטפת עליונה תלוי באופן הקווים המרכיבים אותה. פרופ' מיכה שריר מאוניברסיטת תל-אביב הראה את ההקבלה בין מעטפות עליונות של קווים לבין סדרות מתמטיות הנקראות סדרות דוונפורט-שינצל (Davenport-Schinzel Sequences). אלו הן סדרות של תווים שבהן האורך המרבי של כל תת-סדרה המורכבת מזוג תווים מתחלפים חסום על-ידי מספר כלשהו, ולאותו תו אסור להופיע פעמיים ברצף. למשל, הסדרה ‹1,2,1,3,2,1,2,3,1,4,2,3,2,1› היא

סדרה שבה נעשה שימוש רק בתווים מהקבוצה 1,2,3,4. אם נמחק ממנה את כל המופעים של 3 ו-4, נקבל את תת-הסדרה ‹1,2,1,2,1,2,1,2,1›, שהיא תת-הסדרה הארוכה ביותר המורכבת מזוג תווים מתחלפים שקיימת בסדרה המקורית. אורך תת-הסדרה הזאת הוא 9, כלומר יש 8 החלפות, ולכן לפי ההגדרה הסדרה המקורית היא סדרת דוונפורט-שינצל מסדר 8 המורכבת רק מן התווים 1,2,3,4.

אחד המאפיינים המעניינים של סדרות אלו הוא שהן אינן יכולות להיות ארוכות ביותר, גם אם נרשה לזוג תווים מספר חילופים רב. השימושיות שלהן טמונה בכך שאם לגבי סדרה כלשהי אפשר לדעת **מראש** כמה פעמים כל זוג תווים יכול להתחלף, אפשר לחסום את האורך המקסימלי של הסדרה. למשל, באלף-בית העברי 22 אותיות. נניח שאנו מרשים לכל זוג אותיות לכל היותר שתי החלפות. ‹ א,ב,א,ג,א,ד › היא דוגמה לסדרה חוקית; ‹ א,ב,א,ג,ד,ב › היא דוגמה לסדרה לא-חוקית, מכיוון שבתת-הסדרה המכילה רק את א׳ וב׳ יש שלוש החלפות. סדרה שמצייתת לחוקיות זו תהיה באורך 44 אותיות לכל היותר, כיוון שזהו החסם על אורכה של סדרת דוונפורט-שינצל מסדר 2 המורכבת מאלף-בית שבו 22 תווים.

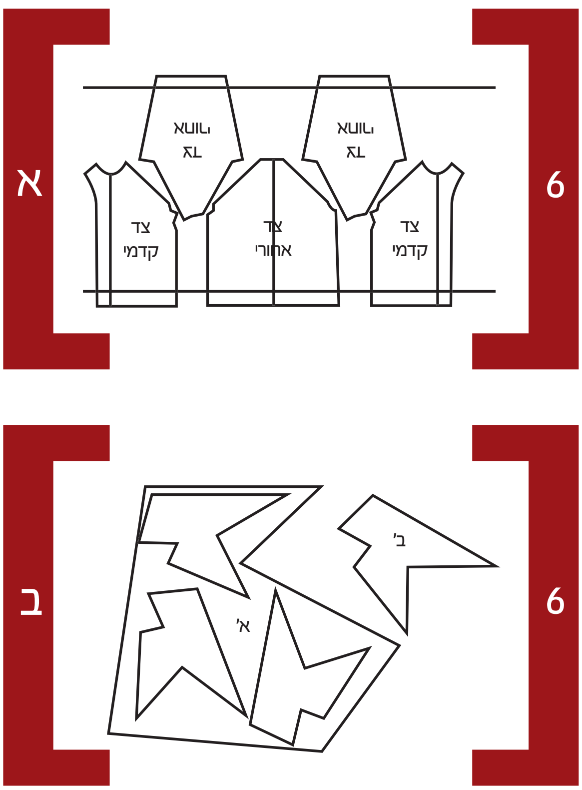
מה הקשר בין סדרות של תווים למעטפות עליונות? נניח את המקרה הפשוט, שבו הקווים במעטפת ישרים (כמו באיור 5ב). נסמן כל קו בתו, ונבחן את הסדרה המתקבלת מרישום הקטעים על המעטפת במעבר משמאל לימין. כל זוג קווים (נניח a, b) יכול לייצר תת-סדרה באורך 2 לכל היותר. טענה זו מבוססת על העובדה הגאומטרית הפשוטה, ששני קווים ישרים נחתכים בדיוק פעם אחת, ולכן מימין לנקודת החיתוך, הקו התחתון כבר אינו יכול להופיע שנית מעל הקו העליון, וממילא לא במעטפת של כלל הקווים. לכן, מספר הקטעים במעטפת חסום על-ידי אורכה של סדרת דוונפורט-שינצל מסדר 1 המורכבת ממספר תווים כמספר הקווים. אורך סדרה כזאת הוא לכל היותר מספר הקווים. נחזור לבלונים. אם נניח שמהירות העלייה של כל בלון היא קבועה, אזי הקו שהוא מצייר הוא קו ישר, ונקבל שמספר השינויים הוא לכל היותר כמספר הבלונים.

נחזור לבעיה המקורית — מעקב אחרי אוסף נקודות הקיצון. בעזרת טכניקה דומה לטכניקה שהצגנו (שימוש בסדרות דוונפורט-שינצל), אפשר לחסום את מספר הנקודות שיהוו נקודות קיצון בשלב כלשהו בתהליך, וכך להעריך את יעילותו של האלגוריתם העוקב אחריהן.

מקסימום חולצות, מינימום בד

חיתוך בד בצורה אופטימלית הוא בעיה מרכזית בייצור מוצרי טקסטיל. בדרך-כלל, לגליל הבד רוחב מסוים וקבוע, ויש לגזור ממנו גזרות שונות, שמהן נתפר לאחר מכן המוצר (איור 6א).

בסימון הגזרות לחיתוך, הבעיה העיקרית היא איך למקם את הגזרות כך שיהיה מינימום אבדן של חומר. מעבר למגבלות של מקום — לגזרות אסור כמובן לחפוף זו את זו — יכולות להיות מגבלות נוספות. למשל, גזרות מסוימות חייבות להיות מונחות בכיוון מסוים, בגלל הדפסים על הבד; במוצרי עור יש חלקים הצריכים להיגזר מאזורים מסוימים בחומר הגלם, ועוד. מנקודת מבט גאומטרית, הבעיה הבסיסית היא כזו: בהינתן שני מצולעים א׳ וב׳, צריך להחליט אם מצולע א׳ יכול להכיל את מצולע ב׳ (The Polygon Containment Problem). לבעיה גאומטרית זו גרסאות שונות: האם מותר לסובב את המצולעים; מהו המספר המקסימלי של מצולעים מסוג ב׳ שאפשר להכניס לא׳ (איור 6ב); כמה אפשר להגדיל את ב׳ כך שא׳ יוכל עדיין להכילו (scaling, בעיה הקשורה להצגת אלמנטים גרפיים על מסך), ועוד. את הפתרון לבעיות התיאורטיות הללו אפשר לממש אחר-כך בתוכנות מחשב שיעזרו לפתור את בעיית הגזירה.



איור 6: (א) סימון גזרות לחיתוך. (ב) מצולע א׳ יכול להכיל שלושה עותקים של מצולע ב׳

ההרחבה של הבעיה לתלת-ממד גם היא מעניינת מאוד, אפילו במקרה הפשוט שהגופים התלת-ממדיים הם תיבות. חשבו על רובוט המסדר מחסן. למחסן שהרובוט מנהל יכולים להגיע מוצרים שונים הארוזים בארגזים, שמידותיהם מוכרות לרובוט. בהגיע חלק, הרובוט מנסה למקם אותו כך שיישאר מקום מרבי לחלקים הבאים (לבעיה זו כמובן היבטים נוספים, למשל – החלקים צריכים להיות מונחים זה על זה). הרובוט יכול אולי להוציא ארגזים ישנים ולסדר אותם אחרת כדי לנצל טוב יותר את החלל הפנוי, הכל לפי הבנתו את היחס בין הצורה המכילה (החלל הפנוי) לבין הצורה המוכלת (הארגז החדש). בעיות דומות בתלת-ממד קיימות גם ביישומים ביולוגיים ורפואיים, שבהם יש צורך לבחון התאמה בין מבנים. בעיה מפורסמת נוספת הקשורה לנושא זה היא **בעיית הספה** (The Moving Sofa Problem) – מה מידותיה של הספה הגדולה ביותר שאפשר להעביר במדרגות (ראו קישורים בסוף).

חלוקת תדרים וצביעת מפות

נסכם בקשר שבין חלוקת תדרים ברשת אלחוטית וצביעת מפה מישורית.

אחת הבעיות המרכזיות בתקשורת אלחוטית היא חלוקת התדרים. נניח שספק תקשורת מחזיק אוסף של משדרים הממוקמים בנקודות שונות. מסביב לכל משדר יש אזור שבו התשדורת של אותו משדר נקלטת היטב. אנו מניחים שהמשדרים ממוקמים כך שהטווח שלהם מכסה את כל המישור. מכיוון שיש חפיפה מסוימת בין שטחי הקליטה של משדרים שכנים, יש להקצות תדר שונה לכל שני משדרים שלאזורי השידור שלהם גבול משותף (לא נקודתי). הקושי בהקצאה נובע מכך שהמפעיל מעוניין להשתמש במינימום תדרים. אפשר לייצג את הבעיה כמפה מישורית, שבה כל "אזור שידור" הוא "מדינה". כל צבע יסמן תדר נפרד. כך קיבלנו את הבעיה שלהלן: בהינתן מפה מישורית, איך אפשר לצבוע אותה במינימום צבעים, תוך שמירה על כך שכל שני אזורים שכנים ייצבעו בצבעים שונים (איור 7)?

7

איור 7: צביעה חוקית (אך בזבזנית) של מפת הודו

לפי משפט ארבעת הצבעים, כל מפה מישורית אפשר לצבוע תוך שימוש בארבעה צבעים בלבד. מאחורי משפט צנוע-לכאורה זה מסתתר אחד המיתוסים הגדולים של עולם המתמטיקה, שעלילותיו כבר נגולו בהרחבה מעל דפי "גליליאו" (ג'ודי טל: "שאלה של צבע", גיליון 51).

על בסיס ההוכחות למשפט פותחו כמה אלגוריתמים לצביעת מפות בארבעה צבעים. למען ההגינות, נציין שכפי הנראה אין שום מפעיל סלולרי המשתמש בהם, מאחר שהם מסובכים למדי. אלגוריתמים פשוטים יותר הנמצאים בשימוש מחשבים צביעה לא-אופטימלית בחמישה, שישה או שבעה צבעים.

בשנת 1996 ארגן פרופ' ברנרד שאזל (Chazelle) מאוניברסיטת פרינסטון ועדה שהורכבה ממדענים העוסקים בתחום, תחת הכותרת "כוח משימה גאומטרי" (Computational Geometry Impact Task Force). מטרתה של הוועדה היתה למפות תחומים יישומיים במדעי המחשב ובמדעים אחרים אשר לגאומטריה החישובית יכולה להיות תרומה גדולה עבורם, על-ידי פיתוח אלגוריתמים ותשתית מתמטית. הרשימה כללה תחומים כרובוטיקה ותכנון תנועה, גאוגרפיה, ביולוגיה מולקולרית, כימיה, ייצור תעשייתי, פיזיקה ועוד. כ-10 שנים אחרי, אפשר לומר שהגאומטריה החישובית תרמה תרומה נכבדת להתפתחויות בחלק גדול מתחומים אלה, אף שהבעיות התיאורטיות הן עדיין מרכז הכובד בתחום. אמנם התיאוריה שונה מהפרקטיקה, אולם היא גם זו שניצבת בבסיסה. ■

גיורא אלכסנדרון סיים לאחרונה לימודי תואר שני במדעי המחשב באוניברסיטת תל-אביב. בעבודת התזה פיתח אלגוריתמים למעקב אחר גופים נעים במישור. כיום מפתח תוכנה בחברת Cadence.

קישורים:

http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/compgeom/ – אתר המרכז מידע וקישורים בנושאי גאומטריה חישובית.

http://www.ics.uci.edu/~eppstein/geom.html – אתר המרכז מידע רב על יישומים של גאומטריה חישובית.

http://www.studyworksonline.com/cda/content/article/0,,EXP1755_NAV2-95_SAR1766,00.shtml – דף המציג את "בעיית הספה" בצורה משעשעת.

מודעה