שלוש יחידות

متواليات ودوال أخرى

סדרות ופונקציות נוספות

طبعة منقحة

دائرة تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم

متواليات ودوال أخرى

סדרות ופונקציות נוספות

طبعة منقحة

دائرة تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم

يصدر بمبادرة ومراقبة
المركز الاسرائيلي لتدريس العلوم على اسم عاموس دي شليط
من تأسيس
وزارة المعارف والثقافة، والجامعة العبرية في القدس، ومعهد وايزمن للعلوم، رحوبوت

يمنع منعاً باتاً تكرار، أو نسخ، أو تصوير، أو تسجيل، أو ترجمة، أو اختزان في مجمع معلومات، أو بث بأية طريقة كانت، الكترونية، أو بصرية، أو ميكانيكية، أو بأية طريقة أخرى، أي جزء من مادة هذا الكتاب لاستخدامه لأغراض تجارية الاّ باذن خاص واضح ومكتوب من الناشر.

(c)

حقوق الطبع محفوظة
معهد وايزمن للعلوم
طبع في اسرائيل سنة 1998
דפוס גסטליט חיפה בע"מ

تأليف:
نوريت هداس
اورلي غوطلب

استشارة:
ابراهام هركبي
مخائيل كورن

ترجمه الى العربية:
الياس حايك

مراجعة واعداد:
ناصيف فرنسيس

الى الطالب

أُعدّ هذا الكتاب للطلاب الذين يتعلمون نحو 3 وحدات.
نقطة الانطلاق هي المعرفة الخاصة لموضوع المتواليات من الدراسة في السنوات السابقة، وبالأساس من اختبارات البسيخومتري والاحاجي المسلية.
يندمج موضوع المتواليات في موضوع التحليل. بعد تعلّم الفصل الأول عن المتواليات، ستتعلم وتتعرّف في الفصل الثاني، الى عائلتين جديدتين من الدوال، هما الدوال الأسية والدوال اللوغرتمية.

هذا ونقدّم شكرنا لطلاب الصفوف الثانية عشرة في المدارس:
فيتسو في رحوبوت، المدرسة الشاملة في كريات ملاخي والمدرسة المنطقية في جبعات باختر. نشكرهم على حسن تعاونهم واستعدادهم اللذين اظهروهما أثناء تعلّمهم الطبعة التجريبية من الكتاب. نثمّن ردود أفعالهم وملاحظاتهم التي كانت لنا عوناً كبيراً في تحضير وتنقيح الطبعة الحالية.

محتويات الكتاب

صفحة

الفصل الأول - المتواليات 7-130

متواليات، قوانين ومفاهيم 7

وصف المتواليات 13

كتابة القانون 25

اشارة جيدة 32

قوانين تراجعية مختلفة 38

المتوالية حسب المكان 44

المتوالية الحسابية 56

عن المتوالية الحسابية أيضاً 65

مجموع المتواليات 75

متوالية أخرى 82

قالب لمجموع متوالية (حسابية) 84

ايجاد n حسب S_n و a_n 94

أعداد كبيرة في الحاسبة 104

المتوالية الهندسية 112

عن المتواليات أيضاً 122

تمارين مراجعة (متواليات هندسية وحسابية) 127

الفصل الثاني – من المتواليات الى الدوال الأسيّة 131-210

وماذا "قبل الحد الأول"؟ 131
قوانين القوى لأس صحيح 141
أعداد "صغيرة جداً" في الحاسبة 144
القوة لأس غير صحيح 150
ما معنى "القوة" نصف 160
ازاحات وانعكاسات 166
واحدة من العائلة 174
عن بحث الدالة الأسيّة وعن المماس أيضاً 186
دالتان عكسيتان 193
مشتقة الدالة $y = \ln(x)$ 203

تفسير الرموز

تمرين "مفتاح" – للبحث

تمرين تحد

عمل ذاتي

تلخيص

انتبه

تذكير

حاسبة

تحضير

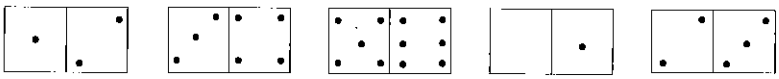
الفصل الأول - المتواليات

متواليات، قوانين ومفاهيم

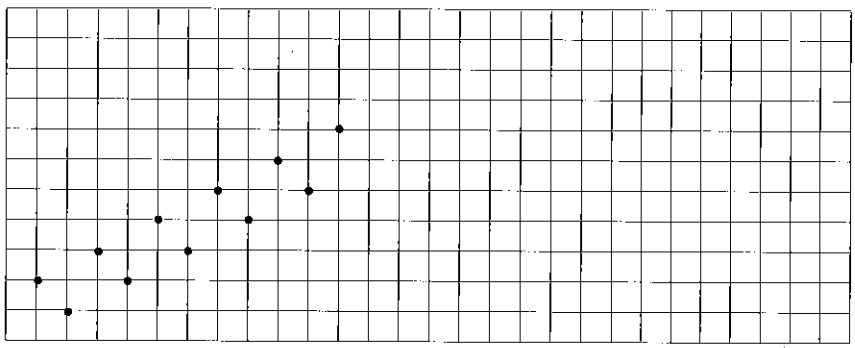
1. اكتشف القانون الذي حسبه نتجت "المتوالية" واكتب ثلاثة حدود أخرى.

أ) ___ , ___ , ___ , 7 , 12 , 17 , 22 , 27 , 32

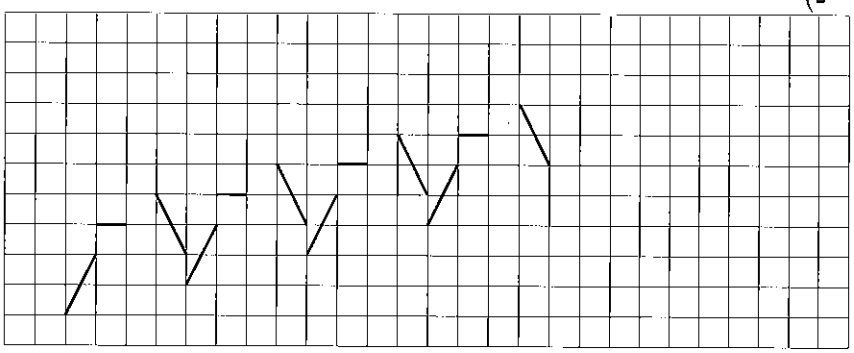
ب) حجارة الدومينو:



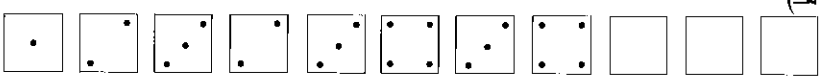
جـ)



د)



هـ)



___ _____ _____ _____ ___

لقد رأيت من الأمثلة، ان **المتوالية** هي صف من الأعداد أو الأشكال أو الصور... وهي تُبنى بشكل عام، حسب قانون معيّن. الأعداد أو الأشكال أو الصور... تدعى حدود المتوالية.

في التمرين 1 كان عليك ان تكتشف القانون لتتمكّن من متابعة المتوالية. وأما في التمرين الآتي فالقانون معطى.

2. أ) اكتب سبعة حدود أخرى من متوالية، حدها الأول 2 وكل حد منها ينتج من اضافة 3 الى سابقه.

2 , ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

ب) اكتب الحدود الثمانية الأولى من متوالية، حدها الأول 2 وكل حد منها ينتج من ضرب سابقه في 3.

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

بماذا تتشابه المتواليتان في البندين أ وَ ب؟ وبماذا تختلفان؟

جـ) اكتب الحدود الستة الأولى من متوالية، حدها الأول 128 وكل حد منها ينتج من قسمة سابقه على 2.

___ ___ ___ ___ ___ ___

د) اكتب الحدود الستة الأولى من متوالية، حدها الأول 196 وكل حد منها ينتج من قسمة سابقه على 2.

___ ___ ___ ___ ___ ___

بماذا تتشابه المتواليتان في البندين جـ وَ د؟ وبماذا تختلفان؟

هـ) اكتب الحدود الستة الأولى من متواليتين مختلفتين بحيث يكون لهما نفس القانون.

___ ___ ___ ___ ___ ___

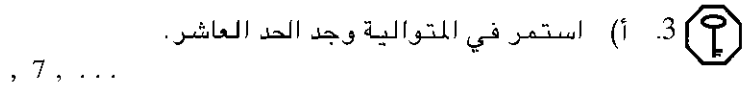
___ ___ ___ ___ ___ ___

و) اكتب الحدود الستة الأولى من متوالية، حدها الثاني 3 وكل حد منها ينتج من اضافة 4 الى سابقه.

احدى الطرق لانتاج متوالية، هي تحديد القانون والحد الأول منها (أو أي حد آخر من المتوالية).

لكل حد من المتوالية يوجد **مكان**.

مثلاً في المتوالية ... 15 , 13 , 11 , 9 , 7 , 5 , 3 , 1 الحد 9 يظهر في المكان **الخامس**، وفي المكان **التاسع** يظهر الحد 17.



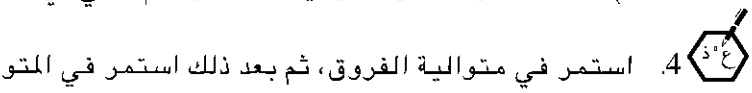
3. أ) استمر في المتوالية وجد الحد العاشر.

. . . , 7 , 3 , 1– , 5–

ب) اكتب القانون الذي نتجت المتوالية حسبه، بالكلمات.

جـ) هل 27 هو حد من المتوالية؟ اذا كان نعم – في أي **مكان** يظهر؟

د) هل 42 هو حد من المتوالية؟ اذا كان نعم – في أي **مكان** يظهر؟



4. استمر في متوالية الفروق، ثم بعد ذلك استمر في المتوالية الأصلية.

أ)

1 2 4 7 11 — —

1 2 3 4 — —

ب)

3 2 3 1 3 0 3 — — —

-1 1 -2 2 -3 3 — — —

انّ ايجاد متوالية الفروق بين حدود المتوالية، يساعد أحياناً في اكتشاف قانونها ويمكن من متابعة المتوالية المعطاة نفسها.

تمارين:

5. أضف حدين الى كل متوالية واكتب القانون بالكلمات.

أ) 2 , 6 , 10 , 14 , 18 , 22 , 26 , ___ ___

ب) 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 , ___ ___

جـ) 1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , 22 , 29 , ___ ___

د) 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , ___ ___

6. أ) ادّعى يوسف: اذا كان لمتواليتين نفس القانون، فان لهما نفس الحدود بالضبط.

ب) ادّعت سعاد: يمكن ان توجد متواليتان ليس لهما أي حد مشترك، ورغم ذلك لها نفس القانون.

جـ) ادّعت سلوى: اذا كان لمتواليتين نفس القانون، فان على الأقل، بعض حدود المتواليتين متساوية.
أي من الثلاثة صدق؟ علّل بواسطة أمثلة.

7. أ) اكتب الحدود الخمسة الأولى من متواليتين مختلفتين، بحيث كل حد منهما ينتج من ضرب سابقه في 2.

ب) اكتب الحدود الخمسة الأولى من متواليتين مختلفتين، بحيث كل حد منهما ينتج من ضرب سابقه في 2 واضافة 1 الى النتيجة.

8. أ) اكتب متواليتين **مختلفتين** لهما نفس الحد الأول.

ب) اكتب متواليتين **مختلفتين** لهما نفس الحدين الأولين.

جـ) اكتب متواليتين **مختلفتين** لهما نفس القانون.

9. الحد الأول من متوالية هو 3 . وكل حد منها ينتج من طرح 1 من سابقه ثم ضرب الفرق الناتج في 2.

أ) اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتوالية.

ب) هل العدد 130 هو حد من المتوالية؟ اذا كان نعم – ما هو مكانه؟

جـ) هل 12 هو حد من المتوالية؟ اذا كان نعم – ما هو مكانه؟

د) هل 300 هو حد من المتوالية؟ اذا كان نعم – ما هو مكانه؟

10. استمر في متوالية الفروق، ثم بعد ذلك استمر في المتوالية الأصلية.

أ) المتوالية 2 3 6 11 18 27 ___ ___

الفروق 1 3 5 7 9 ___ ___

ب) المتوالية 12 11 9 6 2 -3 -9 ___

الفروق -1 -2 ___ ___ ___ ___

جـ) المتوالية 1 3 7 15 31 ___ ___

الفروق 2 4 8 16 ___ ___

د) المتوالية 2 ___ ___ ___ ___ ___ ___

الفروق 15 13 11 9 ___ ___ ___

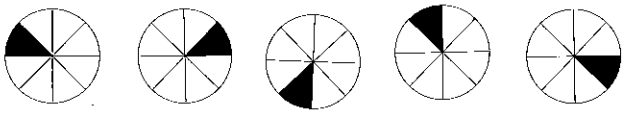
هـ) قانون متوالية الفروق هو: كل فرق يزيد 2 عن سابقه.

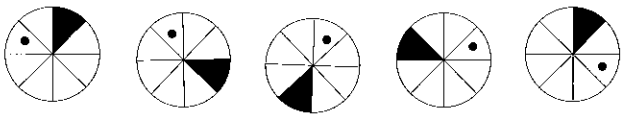
المتوالية 5 ___ ___ ___ ___

الفروق 3 ___ ___ ___ ___

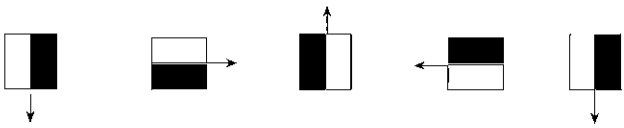
11. اكتشف القانون وأضف حداً واحداً لكل متوالية.

أ)

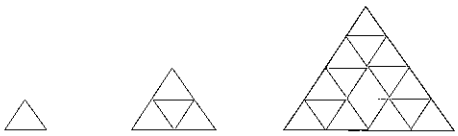
ب) 

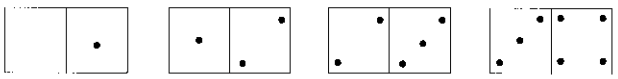
جـ) 

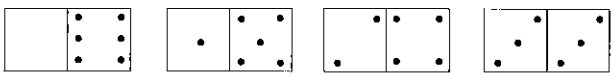
د)

هـ) 

و)

ز) 

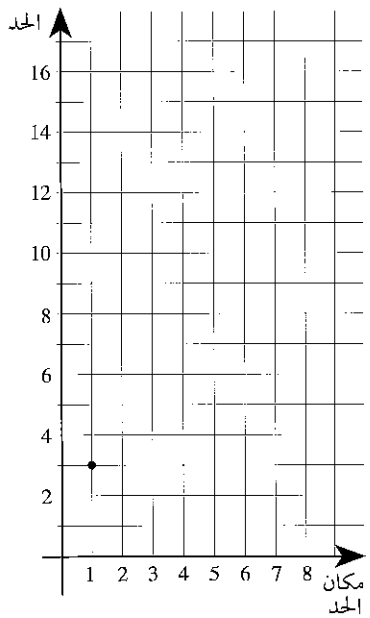
ح) 

ط) 

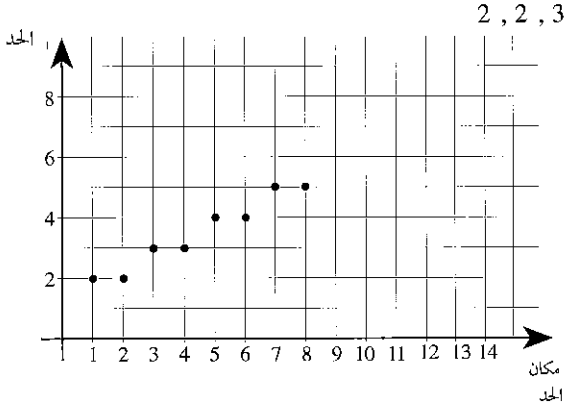
وصف المتواليات

يمكن وصف متوالية أعداد، أيضاً بواسطة الرسم البياني. المحور x يمثل **أمكنة الحدود**، ويمثل المحور y **الحدود نفسها**.
الشكل الناتج هو رسم بياني لنقط.

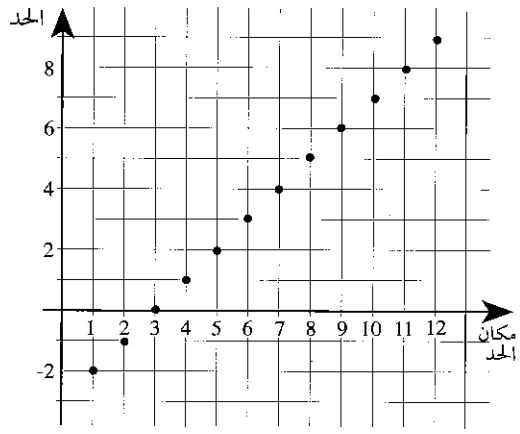
1. أ) في المكان **الأول** في المتوالية ... , 9 , 7 , 5 , 3 يظهر العدد 3 .
النقطة (1,3) معيّنة في هيئة المحاور.
في المكان **الثاني** يظهر العدد 5 عيّن النقطة (2,5) في هيئة المحاور.
في المكان **الثالث** من المتوالية يظهر العدد 7. عيّن النقطة في هيئة المحاور. استمر في حدود المتوالية حتى المكان الثامن.
اكتبها وعيّنها في هيئة المحاور.



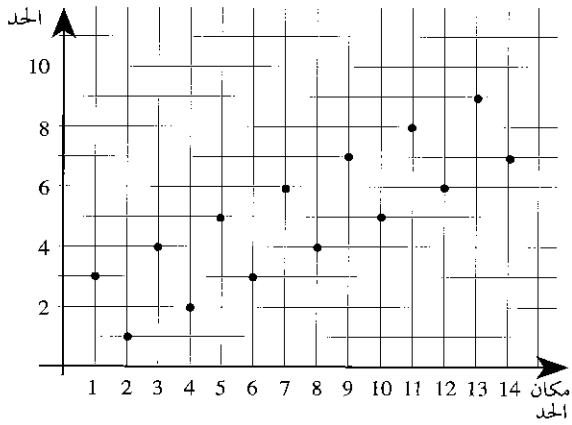
ب) استمر في الرسم البياني الملائم للمتوالية الآتية حتى المكان 12 .
... 5 , 4 , 4 , 3 , 3 , 4 , 2 , 2



2. أ) اكتب العشرين حداً الأولى من المتوالية المبيّنة في الرسم.

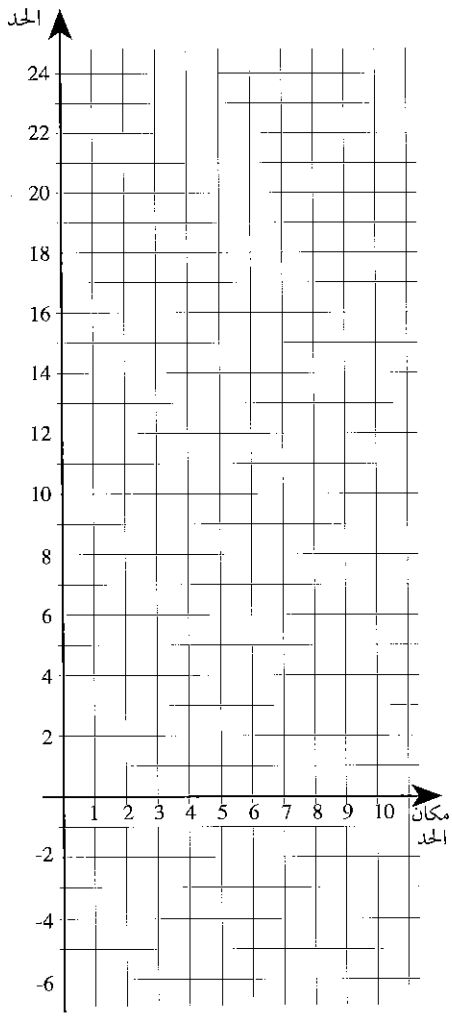


ب) اكتب 16 حداً الأولى من المتوالية المبيّنة في الرسم.



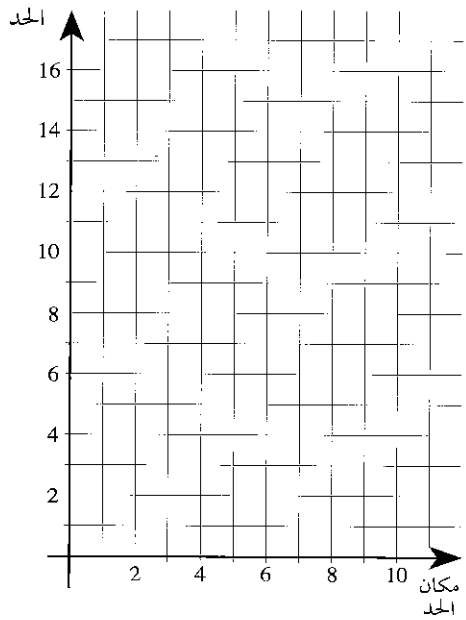
3. استمر في كل متوالية حسب المطلوب في البند وعيّن الحدود في هيئة المحاور.

أ) حتى المكان الثامن . . . , 11 , 7 , 3 , 1 – , 5 –



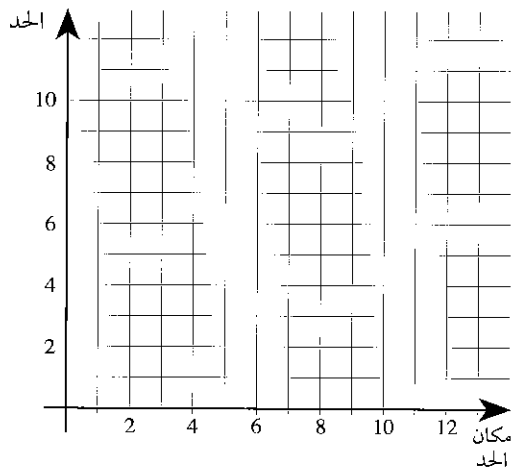
ب) حتى المكان السابع

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 4 , ...

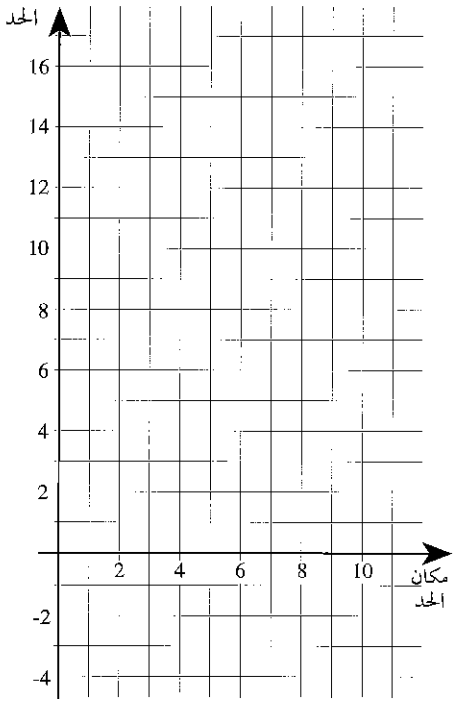


جـ) حتى المكان العاشر

0 , 3 , 2 , 5 , 4 , 7 , 6 . . .

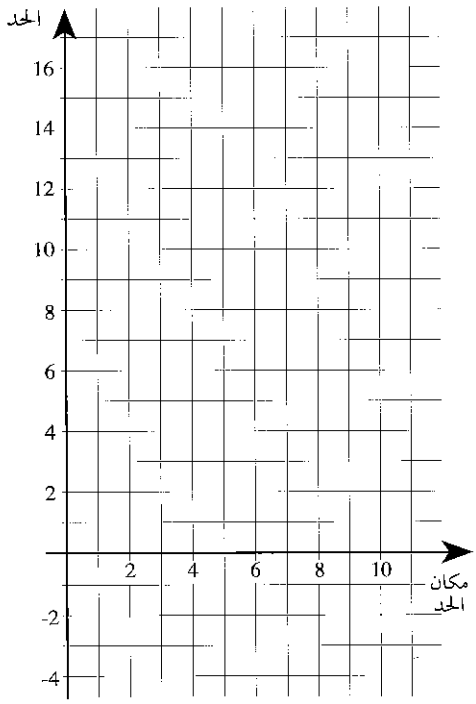


4. أ) اكتب الحدود الثمانية الأولى من متوالية، حدها الأول 3- وكل حد منها ينتج من اضافة 2 الى سابقه.
عيّن الحدود في هيئة المحاور.



ب) اكتب الحدود الثمانية الأولى من متوالية، حدها الأول 1 وكل حد منها ينتج من اضافة 2 الى سابقه.
عيّن حدود المتوالية بلون آخر، في نفس هيئة المحاور.

جـ) اكتب ثمانية حدود من متواليتين مختلفتين، لهما نفس القانون وتختلفان في حدهما الأول.
عيّن نقطاً ملائمة في هيئة المحاور (كل متوالية بلون خاص).



د) ماذا يمكنك ان تقول عن الرسمين البيانيين لمتواليتين، لهما نفس القانون وتختلفان في حدهما الأول؟

من المعتاد ان نرمز الى حدود المتوالية كالآتي:
$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots\ldots$
العدد يبيّن مكان الحد في المتوالية.

5. أ) استمر في المتوالية

-14 , -11 , -8 , -5 , -2 , ___ ___ ___ ___

ب) أكمل.

$a_{10} =$ $a_7 =$ $a_1 =$ $a_3 = -8$

$a_{12} =$ $a_8 =$ $a_6 =$ $a_4 =$

6. أ) في متوالية، معطى أن $a_1 = -1$ وكل حد منها ينتج من ضرب سابقه في 2 وطرح 1 من النتيجة..

اكتب الحدود الستة **الأولى** من المتوالية.

أكمل: $a_7 =$

$a_{10} =$

ب) في متوالية، معطى أن $a_3 = 5$ وكل حد منها ينتج من اضافة 3 الى سابقه.

اكتب الحدود الستة الأولى من المتوالية.

7. معطى: $a_1 = -14$ $a_4 = 1$

$a_2 = -9$ $a_5 = 6$

$a_3 = -4$ $a_6 = 11$

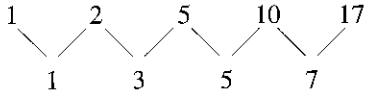
اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتوالية.

-14 , ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

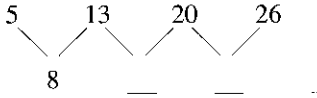
تمارين

8. استمر في المتواليات (انتبه للفروق).

أ) 1 2 5 10 17 26 37 ___ ___



ب) 5 13 20 26 31 35 ___ ___



جـ) -10 -8 -4 2 10 20 ___

د) 50 , 49 , 47 , 44 , 40 , 35 , ___ ___

هـ) 1 , 3 , 7 , 15 , 31 , ___ ___

و) −3 , 0 , 5 , 12 , 21 , 32 , ___ ___

9. أكمل وجد a_8 من كل متوالية.

أ) $a_8 =$ ____ ____ ____ , 11 , ____ ____ , 3 , 1

ب) $a_8 =$ ____ ____ ____ ____ , 4 · 5 , 3 · 4 , 2 · 3 , 1 · 2

جـ) $a_8 =$ ____ ____ ____ , 1 , – 1 , 1 , – 1 , 1 , – 1

د) $a_8 =$ ____ ____ , 15 , ____ , 6 , 3 , 1 , 0

هـ) $a_8 =$ ____ ____ ____ , 21 , 13 , 7 , 3 , 1

و) $a_8 =$ ____ 11 , 6 , 2 , –1 , –3 ____

10. أ) $a_1 = 2$ وكل حد من المتوالية ينتج من تربيع الحد السابق.
جد a_3 وَ a_5.

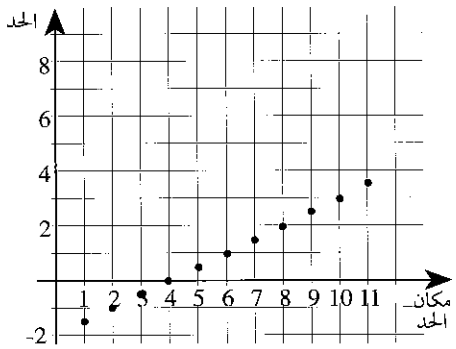
ب) $a_3 = 4$ وكل حد من المتوالية ينتج من اضافة 2 الى سابقه.
جد a_4, وَ a_5, وَ a_1.

جـ) $a_1 = 3$ وكل حد من المتوالية ينتج من جمع الحد السابق مع رقم مكان الحد السابق. جد a_2, وَ a_3, وَ a_4.

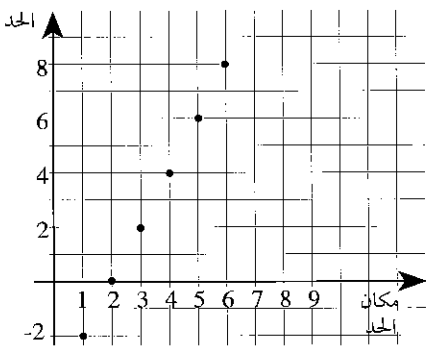
د) $a_2 = 8$ وكل حد من المتوالية ينتج من قسمة سابقة على 2 .
جد a_5, وَ a_6, وَ a_1.

11. اكتب حدود المتوالية حسب الرسم البياني، ثم أضف ثلاثة حدود أخرى.

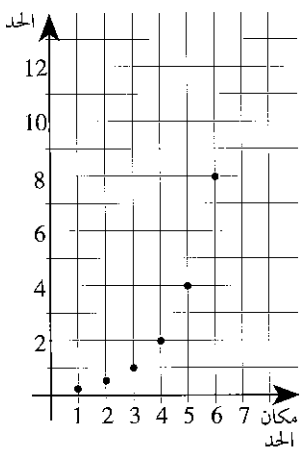
أ)



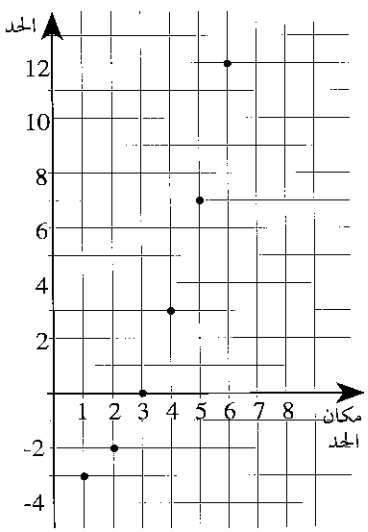
ب)



جـ)



د)



12. تسلّم يوسف رسالة من عمته سلمى:

عزيزي يوسف!

لقد بلغتُ الآن سن 65 . أنا أعيش في بحبوحة وسعادة. لذلك أرغب في منحك قسماً من أموالي.
يمكنك اختيار واحدة من الامكانيات الآتية:

الامكانية 1: أعطيك في هذه السنة $1000, وفي السنة القادمة $1100 وهكذا في كل سنة $100 زيادة عن السنة التي سبقتها.

الامكانية 2: أعطيك في هذه السنة $2000, وفي السنة القادمة $1900 وهكذا في كل سنة $100 أقل من السنة التي سبقتها.

الامكانية 3: أعطيك في هذه السنة $100, وفي السنة القادمة 1.5 مرة من هذا المبلغ (أي100·1.5) وهكذا في كل سنة يتضاعف المبلغ 1.5 مرة عن السنة التي سبقتها.

الامكانية 4: أعطيك في هذه السنة $8, وفي السنة القادمة $16, ثم في السنة التي تليها $32 . و هكذا في كل سنة يتضاعف المبلغ مرتين عن السنة التي سبقتها.

طبعاً، ستكون هذه الاتفاقية سارية المفعول ما دمتُ أنا على قيد الحياة. ارجو ان تعلمني بقرارك في اسرع وقت ممكن.

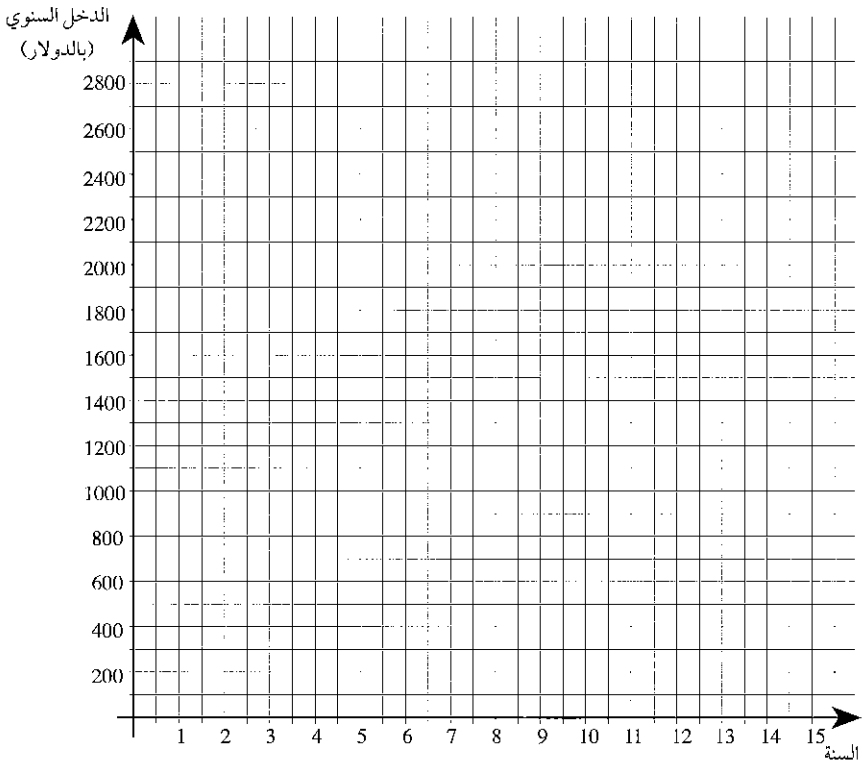
عمتك سلمى المحبة.

يوسف بطبيعته مسرفاً. أي انه حتماً سيصرف كل المبلغ الذي سيحصل عليه في تلك السنة. لذلك كان همه الدخل السنوي وليس المبلغ المتجمع.

أ) اكتب المتواليات المختلفة، وأسدِ له نصيحة ماذا يختار.

ب) عيّن في هيئة المحاور، نقطاً ملائمة لكل واحدة من المتواليات (كل واحدة بلون خاص).

استعن بالرسم البياني وفكّر ثانية وعلّل نصيحتك ليوسف.



كتابة القانون

1. في الاجتماع السنوي لأعضاء ناد، اعتاد كل عضو عند وصوله، ان يصافح أيدي جميع من وصلوا قبله.

عدد المصافحات

أ) – كم مصافحة تمّت بين الثلاثة الأوائل؟ $a_3 =$ ___

– كم مصافحة زادت، عندما وصل الرابع؟
– كم مجموع المصافحات التي تمت بين الأربعة الأوائل؟ $a_4 =$ ___

– كم مصافحة زادت، عندما وصل الخامس؟
– كم مجموع المصافحات التي تمت بين الخمسة الأوائل؟ $a_5 =$ ___

ب) اكتب المتوالية التي تبيّن عدد المصافحات التي تمت، وأكمل.

عضو واحد	2 أعضاء	3 أعضاء	4 أعضاء	5 أعضاء			
0	___	___	___	___	___	___	___

جـ) اكتب القانون بالكلمات. (عدد المصافحات التي زادت) (عدد المصافحات التي كانت)

يمكن الكتابة باختصار: $a_n =$ [الحد السابق] + [عدد الأعضاء الذين وصلوا قبله]

– اكتب بالكلمات معنى $a_9 = 36$.
– جد a_{10} وَ a_{11} حسب a_9.

2. معطى:

$$a_2 = a_1 + 3$$
$$a_3 = a_2 + 3$$
$$a_4 = a_3 + 3$$

وباختصار نكتب:

$$a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} + 3$$

a_n هو الحد الواقع في المكان n (أي كان) من المتوالية.

أ) طريقة الكتابة هذه تبيّن قانون المتوالية. اكتب القانون بالكلمات.

ب) عبر بمساعدة الحد السابق عن:

$a_7 =$

$a_8 =$

جـ) اكتب متواليتين مختلفتين تلائمان القانون.

3. قانون المتوالية هو

$$a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} \cdot 4$$

أ) عبّر عن كل حد بمساعدة الحد السابق.

$$a_2 = a_1 \cdot 4$$
$$a_3 =$$
$$a_5 =$$
$$a_{10} =$$
$$a_{100} =$$

ب) اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية التي تحقق القانون اذا علمت ان $a_1 = 1$.

كما رأيت في البند السابق أيضاً، كي نعرّف متوالية، يجب ان نعلم قانونها وحداً واحداً منها على الأقل (مثلاً قيمة a_1).

جـ) أكمل القانون حسب المتوالية

$1 , 4 , 7 , 10 , 13 , \ldots$

$a_n =$ الحد السابق $+$

4. اكتب قانون كل متوالية بطريقة مشابهة لما كتبته في التمارين السابقة.

أ) $-3 , -1 , 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , \ldots$ $\quad a_n =$

ب) $1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , \ldots$ $\quad a_n =$

جـ) $2 , 7 , 12 , 17 , 22 , 27 , 32 , \ldots$ $\quad a_n =$

د) $81 , 27 , 9 , 3 , 1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \ldots$ $\quad a_n =$

5. اكتب الحدود الخمسة الأولى من كل متوالية.

أ) $a_1 = 2$ $\quad a_n = \frac{6}{\text{الحد السابق}}$

ب) $a_1 = 34$ $\quad a_n = \frac{1}{2} \cdot$ الحد السابق $+ 1$

جـ) $a_1 = 3$ $\quad a_n = 10 -$ الحد السابق

6. يزيد ارتفاع نبتة متسلقة $1\frac{1}{2}$ م كل شهر. كان ارتفاع النبتة في لحظة معينة $\frac{1}{2}$ م.

أ) اكتب الحدود الستة الأولى من متوالية الارتفاعات للنبتة.

$\frac{1}{2}$, 2 ___ ___ ___ ___

ب) أكمل كتابة القانون الذي يبيّن كيف ينتج كل حد من سابقه.

a_n =

7. حرباء على ارتفاع $1\frac{1}{2}$ م من قاعدة عمود أملس.
تتسلّق في كل مرة، الى ارتفاع يعادل ضعفي الارتفاع الذي وصلته، ثم تنزلق $\frac{1}{2}$ م الى أسفل.

أ) اكتب الحدود الستة الأولى من متوالية الارتفاعات (كل حد يبيّن موضع الحرباء بعد التسلق والانزلاق).

$1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ ___ ___ ___ ___

ب) أكمل كتابة القانون الذي يبيّن كيف ينتج كل حد من سابقه.

a_n =

تمارين

8. اكتب الحدود الخمسة الأولى من كل متوالية.

أ) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} \cdot 3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} : 2 \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} - 4 \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} + 7 \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} \cdot 2 \end{cases}$

9. معطى قانون متوالية: $a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} \cdot 17$

أ) أكمل: $a_4 = a_3 \cdot ___$

$a_{25} =$ $a_{10} =$

$a_2 =$ $a_{19} =$

$a_{200} =$

ب) اكتب الحدود الخمسة الأولى من متوالية تحقق القانون.

10. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

أ) $a_1 = 4$ $\quad a_n = \frac{1}{\boxed{\text{الحد السابق}}}$

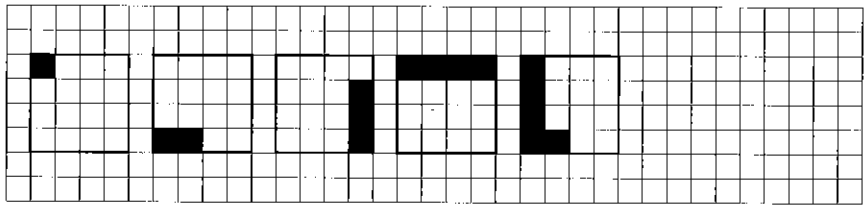
ب) $a_3 = 7$ $\quad a_n = -\boxed{\text{الحد السابق}}$

جـ) $a_2 = 10$ $\quad a_n = \cdot \frac{1}{\boxed{\text{الحد السابق}}}$

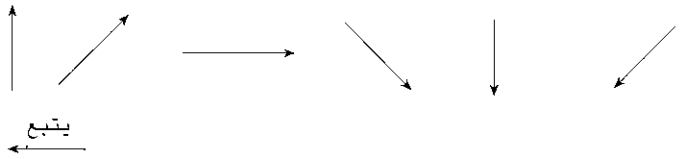
د) $a_1 = 1$ $\quad a_n = 2 \cdot \boxed{\text{الحد السابق}} + 1$

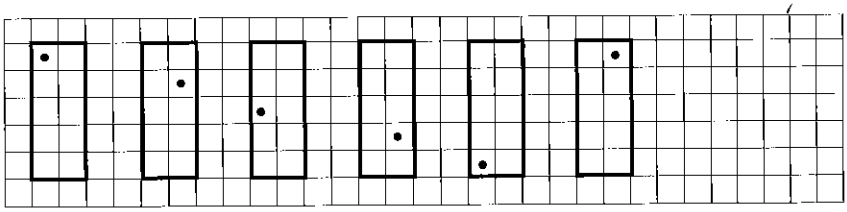
هـ) $a_1 = 0$ $\quad a_n = 2 \cdot \left(\boxed{\text{الحد السابق}} + 1 \right)$

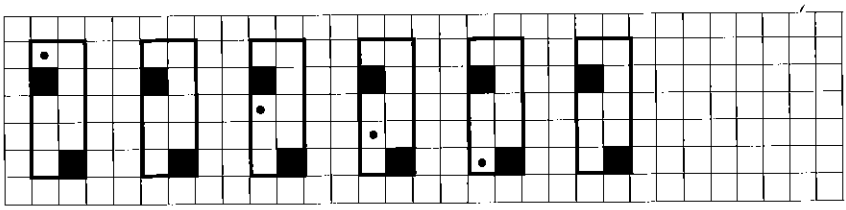
11. أضف حدّين آخرين لكل متوالية.



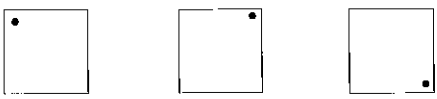
ب)



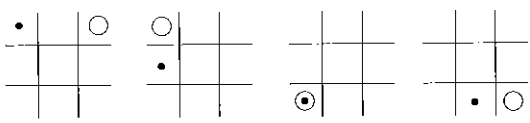




هـ)



و)



اشارة جيدة

معطاة أية متوالية .... a_1, a_2, a_3, a_4.

1. الحد الذي **يسبق** a_7 هو a_6.
   - أي حد **يسبق** a_{1000} ?
   - أي حد **يلي** a_9 ? (الحد الذي بعد a_9.)
   - أي حد **يلي** a_{100} ?
   - أي حد **يلي** a_n ?
   - أي حد **يسبق** a_n ?

2. رتّب الحدود في سطر حسب المكان الترتيبي لها.
   a_{n+2} , a_n , a_{n+1} , a_{n-2}

3. أكمل من أية متوالية:
   أ) a_{n+1} يلي _____ .
   ب) a_{n-2} يسبق _____ .
   جـ) a_n يلي _____ .
   د) a_n يسبق _____ .
   هـ) a_{n-1} يسبق _____ .
   و) a_{n+2} يلي _____ .

4. أ) أي حد من المتوالية يسبق a_n؟
   بدلاً من كتابة قانون المتوالية على شكل:

$$a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} \cdot 4$$

عادة نكتب $a_n = a_{n-1} \cdot 4$

ب) اكتب خمسة حدود متتالية من متوالية تحقق القانون.
(اختر الحد الأول حسب رغبتك).

_____ _____ _____ _____ _____ _____

5. اكتب القانون بواسطة الحد السابق

مثال: القانون: $a_n = a_{n-1} + 7$ معناه $a_n = \boxed{\text{الحد السابق}} + 7$

أ) $a_n = a_{n-1} \cdot 2$

ب) $a_n = (a_{n-1})^2$

جـ) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

6. أ) اكتب القانون بواسطة الحد السابق $a_n = a_{n-1} - 3$.

ب) اكتب الحدود الخمسة الأولى من متوالية تحقق القانون اذا كان $a_1 = 4$.

جـ) اكتب الحدود الخمسة الأولى من متوالية تحقق القانون اذا كان $a_1 = 10$.

د) اكتب الحدود الخمسة الأولى من متوالية تحقق القانون اذا كان $a_1 = 18$.

7. معطى في متوالية:

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

تعريف متوالية بواسطة قانون يبيّن كيف ينتج كل حد من سابقه، وتعيين قيمة a_1, أو أي حد آخر من المتوالية، يدعى تعريف المتوالية بواسطة **القانون التراجعي**.
a_1 يدعى أيضاً **شرط البداية**.

فيما بعد سنرى أنه يلزم أحياناً أكثر من حد واحد لتعريف المتوالية بواسطة القانون التراجعي.

8. احسب الحدود الخمسة الأولى من كل متوالية.

أ) $\begin{cases} a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \\ a_1 = 10 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_n = (a_{n-1})^2 - 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$

تمارين

9. أ) أي حد يسبق a_{n+5} ؟
ب) أي حد يلي a_{n-1}؟
جـ) أي حد يسبق a_{n+1}؟

10. اكتب "صحيح أو غير صحيح".
أ) 7 يبيّن **مكان** a_7 في المتوالية.
ب) اذا كان $a_8 = 7$, فان 7 يبيّن **مكان** الحد الثامن في المتوالية.
جـ) في كل متوالية a_8 **يلي** a_7.
د) لا يمكن ان يكون مكان الحد مساوياً لقيمة الحد نفسه.
هـ) $a_2 + a_3$ هو مجموع حدين **متتاليين** من المتوالية.
و) اذا كان $a_4 = 5$, فان 5 يبيّن **قيمة** الحد الرابع من المتوالية.
ز) a_{3+1} هو الحد الرابع من المتوالية.

11. اكتب القانون بمساعدة الرموز (بدون كلمات).

مثال: بالرموز: $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3$

أ) $a_n = 2 \cdot$ [الحد السابق] $+ 3$

$a_n = 2 \cdot \left(\text{[الحد السابق]} + 3 \right)$

ب) $a_n =$ [مجموع الحد الذي يسبق a_n مع الذي يلي a_n]

جـ) $a_n =$ [الحد السابق]^2

د) $a_n =$ [حاصل ضرب الحدين السابقين لـ a_n]

12. احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

أ) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 9 \\ a_1 = -3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_n = 3 \cdot (a_{n-1} + 2) \\ a_1 = -2 \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2 \\ a_1 = -2 \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} \\ a_1 = 10 \end{cases}$

13. أ) احسب الحدود الثمانية الأولى من المتوالية.

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

1 , ___ , ___ , ___ , ___ ...

ب) اكتب حداً أولاً وقانوناً آخر، بحيث تحصل على نفس المتوالية.

14. اكتب القانون التراجعي للمتوالية (سجّل ما هو a_1 أيضاً).

مثال: 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , ...

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

أ) 3 , 7 , 11 , 15 , 19 , 23 , . . .

ب) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , . . .

جـ) 7 , 4 , 1 , - 2 , - 5 , - 8 , . . .

د) 81 , 27 , 9 , 3 , 1 , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, . . .

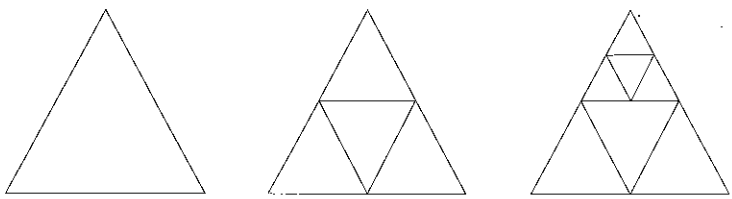
15. كل حد ينتج من سابقه بواسطة توصيل منتصفات أضلاع كل مثلث نتج في المرحلة السابقة.

أ) اكمل الشكل الثالث.

ب) اكمل المتوالية 1, 4, ___ ___ ___ ___ ___

جـ) اكتب قانوناً تراجعياً.

a_n يبيّن عدد المثلثات "الصغيرة" في كل مرحلة.



قوانين تراجعية مختلفة

1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ هو قانون لمتوالية ما.

عبّر عما يأتي حسب القانون، بمساعدة الحد السابق.

مثال: $a_7 = 2a_6 + 1$

أ) $a_8 =$ ب) $a_2 =$ جـ) $a_{100} =$ د) $a_{\square} = 2a_3 + 1$

2. $a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} + 4$ هو قانون لمتوالية ما.

أكمل:

أ) $a_7 =$ ب) $a_2 =$ جـ) $a_{11} =$ د) $__ = \frac{1}{2} \cdot a_3 + __$

3. احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

أ) $\begin{cases} a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 5 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} a_n = -(a_{n-1} + 2) \\ a_1 = 3 \end{cases}$ جـ) $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} \\ a_1 = 4 \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_n = 2 - a_{n-1} \\ a_1 = 8 \end{cases}$ هـ) $\begin{cases} a_n = \frac{1}{a_{n-1}} \\ a_1 = -5 \end{cases}$ و) $\begin{cases} a_n = -\frac{1}{a_{n-1}} \\ a_1 = 2 \end{cases}$

4. كل شخص يدخل الى الغرفة، يُحضر هدية لكل الموجودين فيها. a_n هو عدد الهدايا التي تجمعت حتى حضور الشخص أل -n.

أ) عندما حضر الشخص الثامن: $a_8 = a_7 + $ ___

عندما حضر الشخص التاسع: $a_9 = a_8 + $ ___

$a_{10} =$

القانون: $a_n =$

ب) احسب. (انتبه! عندما حضر الأول لم يكن بحاجة لأية هدية) $a_1 = 0$.

$a_2 = 0 + 1 = 1$ $\quad a_5 =$

$a_3 = a_2 + $ ___ $= 1 + $ ___ $=$ $\quad a_6 =$

$a_4 =$ $\quad a_7 =$

5. احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

أ) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 5 \end{cases}$ $\quad$ جـ) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_1 = 10 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - n \\ a_1 = 30 \end{cases}$ $\quad$ د) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

6. أ) كم عدداً مختلفاً (ذا منزلتين) يمكننا ان نكتب بواسطة الرقمين 1 , 2؟ (كل رقم مرة واحدة). نرمز لهذا بـ a_2 .

ب) كم عدداً مختلفاً (ذا ثلاث منازل) يمكننا ان نكتب بواسطة الأرقام 1,2,3؟ (كل رقم مرة واحدة). نرمز لهذا بـ a_3 .

جـ) كم عدداً مختلفاً (ذا أربع منازل) يمكننا ان نكتب بواسطة الأرقام 1, 2, 3, 4 ؟ (كل رقم مرة واحدة). نرمز لهذا بـ a_4 .

(فكّر أولاً، في كم مكان يمكننا ترتيب الرقم 4 في كل عدد كتبته في البند (ب)).

يتبع

د) كم عدداً مختلفاً (ذا خمس منازل) يمكننا ان نكتب بواسطة الأرقام 1, 2, 3, 4, 5؟ (كل رقم مرة واحدة). $a_5 =$

هـ) اكتب القانون التراجعي الملائم. $a_n =$

7. معطى:

$a_1 = 2$

$a_2 = 4$

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ (كل حد يساوي مجموع الحدين اللذين قبله).

أ) أكمل:

$a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$

$a_4 = a_2 + a_3 =$

$a_5 =$

$a_6 =$

$a_7 =$

$a_8 =$

ب) اكتب متوالية اخرى تحقق القانون $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

تمارين

8. احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

أ) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 7 \\ a_1 = 12 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_n = 2 \cdot a_{n-1} \\ a_1 = 2 \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} a_n = \dfrac{100}{a_{n-1}} \\ a_1 = 20 \end{cases}$

د) $\begin{cases} a_n = (a_{n-1})^2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

9. قانون المتوالية هو $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. أكمل:

أ) $a_3 = a_2 + $ ____ 　　جـ) $a_7 = $ ____ $+ a_5$

ب) $a_{10} = $ _____ 　　د) _____ $= a_{11} + a_{10}$

10. احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

أ) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n \\ a_1 = 7 \end{cases}$ 　　جـ) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_1 = 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n - 1 \\ a_1 = 4 \end{cases}$ 　　د) $\begin{cases} a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$

11. اكتب القانون التراجعي للمتوالية.

أ)
$a_1 = \mathbf{1}$
$a_1 = 1 + \mathbf{2}$
$a_3 = 1 + 2 + \mathbf{3}$
$a_4 = 1 + 2 + 3 + \mathbf{4}$
$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + \mathbf{5}$
⋮
$a_n =$

ب)
$a_1 = \mathbf{1}$
$a_2 = 1 \cdot \mathbf{2}$
$a_3 = 1 \cdot 2 \cdot \mathbf{3}$
$a_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{4}$
$a_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{5}$
⋮
$a_n =$

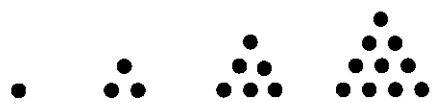
12. أ) في نطاق اسبوع التدرب على اللياقة البدنية، ينفّذ كل متدرّب من القسم (أ) 8 تمارين في اليوم الأول.
على كل متدرّب ان ينفّذ كل يوم تمرينين أقل من ضعفي التمارين التي نفّذها في اليوم السابق.
كم تمريناً ينفّذ كل متدرّب في اليوم الخامس، قبل خروجه الى العطلة.

ب) في قسم آخر، يسري **نفس القانون** بحيث ينفّذ كل متدرّب عدداً آخر من التمارين في اليوم الأول.
على كل متدرّب ان ينفّذ 22 تمريناً في اليوم الثالث.
كم تمريناً ينفّذ كل متدرب في اليوم الخامس؟
كم تمريناً نفّذ كل متدرب في اليوم الأول؟

جـ) عرّف المتوالية بواسطة القانون التراجعي.

$$\begin{cases} a_n = \\ a_1 = \end{cases}$$

13. أ) – أضف حدّين آخرين للمتوالية المرسومة.



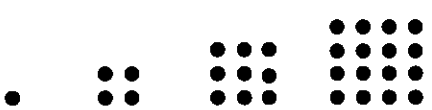
– اكتب تحت كل شكل، عدد الدوائر فيه ثم أضف عددين آخرين من متوالية الأعداد الناتجة.
– اكتب قانوناً تراجعياً ملائماً.

رمز: اكتب أولاً كل حدّ بواسطة سابقه

$a_2 = a_1 + ___$
$a_3 =$

تدعى هذه المتوالية، متوالية **الأعداد المثلثة**.

ب) – أضف حدّين آخرين للمتوالية المرسومة.



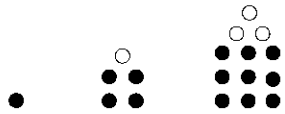
- اكتب تحت كل شكل، عدد الدوائر فيه ثم أضف حدّين آخرين من متوالية الأعداد الناتجة.

- ماذا يكون حسب رأيك، عدد الدوائر في الحد **العاشر** من المتوالية؟

تدعى هذه المتوالية، متوالية **الأعداد المربعة**.

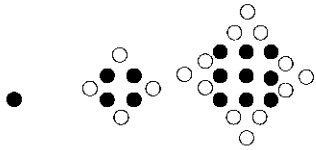
جـ) - ارسم حداً آخر من كل واحدة من المتواليات الآتية.
- اكتب تحت كل شكل، عدد الدوائر فيه ثم حاول ان تضيف حدين آخرين من متوالية الأعداد الناتجة.

الأعداد المخمّسة



الأعداد المسدّسة

الأعداد النجومية



المتوالية حسب المكان

1. أ) احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$$

من الصعب حساب a_{100} حسب القانون المعطى.

ب) احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

أكمل:

$a_{\boxed{n}} = 4 \cdot \boxed{n} - 3$

$a_{\boxed{1}} = 4 \cdot \boxed{1} - 3 =$

$a_{\boxed{2}} = 4 \cdot \boxed{2} - 3 =$

$a_{\boxed{3}} =$

$a_{\boxed{4}} =$

$a_{\boxed{5}} =$

هل حصلت على نفس الحدود الخمسة الأولى من البند (أ)؟

احسب: $a_{100} =$

يمكن البرهنة أنه في (أ) وَ (ب) معرّفة نفس المتوالية. في البند (أ) بُني كل حد حسب الحد الذي يسبقه، بينما في البند (ب) يمكن ايجاد حدود من المتوالية، بدون علاقة في ايجاد أو عدم ايجاد حدود اخرى منها.

تعريف المتوالية المبني على أساس مكان الحد في المتوالية فقط، يدعى تعريف المتوالية حسب **المكان**.

يصعب بشكل عام ايجاد قالب لتعريف المتوالية حسب المكان، ولكن اذا كان القالب معطياً فانه من السهل جداً الحساب بموجبه.

2. قانون متوالية حسب المكان هو $a_{\square} = a \cdot \square - 3$

أ) احسب الحدود الستة الأولى من المتوالية.

أكمل! $a_{\square} = 5 \cdot \square - 3 =$

$a_{\square} = 5 \cdot \square - 3 =$

$a_{\square} =$

$a_{\square} =$

$a_{\square} =$

ب) اكتب الحدود في سطر وأضف ثلاثة حدود اخرى.

2 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

جـ) احسب: $a_9 =$ $a_{50} =$ $a_{100} =$

د) اكتب القانون التراجعي للمتوالية السابقة.

$\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

3. أ) احسب الحدود الأربعة الأولى من المتوالية:

$a_{\square} = 2^{\square}$

$a_{\square} = 2^{\square}$

أكمل! $a_{\square} = 2^{\square}$

$a_{\square} =$

$a_{\square} =$

ب) اكتب الحدود في سطر وأضف ثلاثة حدود اخرى.

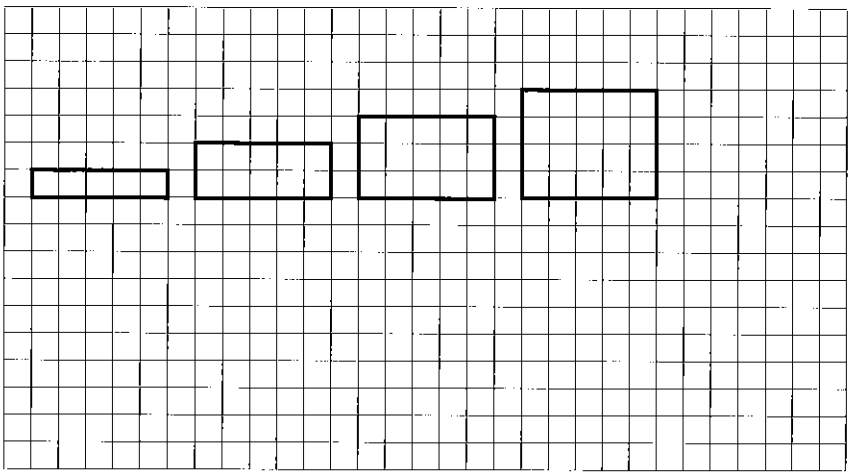
2 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

جـ) احسب a_8 و a_{50} .

اكتب القانون التراجعي للمتوالية السابقة.

$\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

4. أ) استمر في بناء مستطيلات اخرى، ثم سجّل في كل واحد منها مساحته (وحدات القياس تربيعات).



ب) سجّل حواصل الضرب الملائمة لمساحات المستطيلات المرسومة، ثم أضف حدوداً اخرى غير مرسومة.

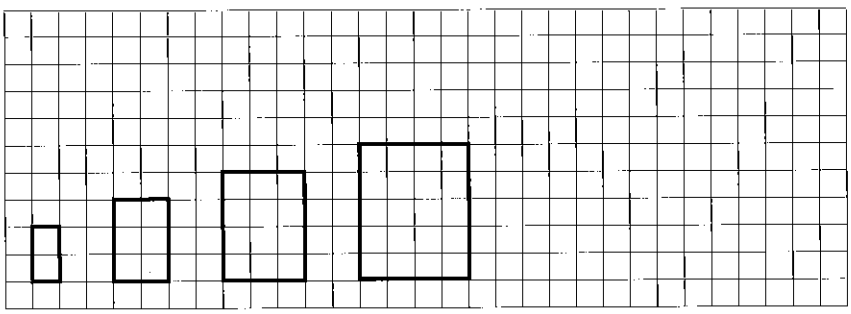
5·1 5·2 ___ ___ ___ ___ ___

جـ) اكتب قالباً يعرّف المتوالية حسب المكان (بمساعدة n).

د) اكتب القانون التراجعي:

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$$

5. أ) استمر في بناء مستطيلات اخرى، ثم سجّل على أضلاع كل واحد منها أطواله، وفي داخله مساحته (وحدات القياس تربيعات).



ب) اكتب الحدود الأولى من متوالية المساحات.

1 · 2 2 · 3 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

جـ) اكتب قالباً ملائماً يُعرّف المتوالية حسب المكان (بمساعدة n).

د) اكتب مرة ثانية، متوالية المساحات بعد حسابها، ثم جد متوالية الفروق أيضاً.

المساحات: 2 , 6 , ___ ___ ___ ___ ___ ___

الفروق: ___ ___ ___ ___ ___ ___ 4

هـ) صف بالكلمات، بمساعدة الفرق، كيف ينتج كل حد من الحد الذي يسبقه في المتوالية الأصلية.

من السهل في هذه المتوالية ايجاد حدودها، وربما أيضاً ايجاد قانون تعريفها حسب المكان، ولكنه صعب أكثر كتابة القانون التراجعي لها.

تمارين

6. أ) احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

$a_{\boxed{n}} = 5 + 2 \cdot \boxed{n}$

$a_{\boxed{1}} = 5 + 2 \cdot \boxed{\quad}$

$a_{\boxed{2}} = 5 + 2 \cdot \boxed{\quad}$

$a_3 =$

.
.
.

ب) اكتب الحدود في سطر وأضف ثلاثة حدود أخرى.

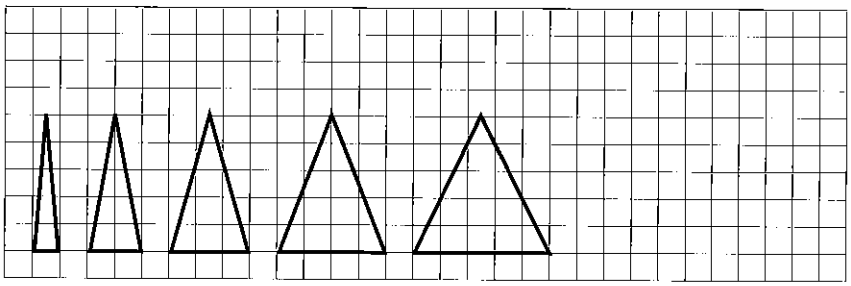
جـ) اكتب كيف ينتج كل حد من المتوالية من الحد الذي **يسبقه**.

د) اكتب القانون التراجعي.

$\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

هـ) بموجب أي تعريف يسهل حساب a_9 أكثر؟ احسب.
بموجب أي تعريف يسهل حساب a_{100} أكثر؟ احسب.

7. أ) احسب مساحات المثلثات وسجّل مساحة كل مثلث تحته.



ب) ارسم مثلثاً آخر وسجّل مساحته.

جـ) اكتب قانون التعريف حسب المكان، لمتوالية مساحات المثلثات.

د) أضف ثلاثة حدود أخرى لمتوالية المساحات.

هـ) كيف ينتج كل حد من المتوالية من الحد الذي يسبقه؟

اكتب القانون التراجعي. $\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

8. أ) احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

$a_n = 3 \cdot 2^n$

$a_3 =$

$a_4 =$ أكمل! $a_{\square} = 3 \cdot 2^{\square}$

$a_5 =$ $a_{\square} = 3 \cdot 2^{\square}$

ب) اكتب الحدود في سطر ثم أضف حدين آخرين.

جـ) اكتب كيف ينتج كل حد من المتوالية من الحد الذي يسبقه.

د) اكتب القانون التراجعي. $\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

9. أ) احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$$

ب) اكتب الحدود في سطر ثم أضف حدين آخرين.

جـ)- كيف ينتج كل حد من سابقه؟

- اكتب القانون التراجعي. $\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

د) حاول ان تكتب قالباً آخر يُعرّف المتوالية حسب المكان.

10.أ) احسب الحدود الستة الأولى من المتوالية.

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n + 1}$$

ب) اكتب قالباً آخر يُعرّف المتوالية حسب المكان.

جـ) اكتب القانون التراجعي للمتوالية. $\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

11. في كل بند تعريفان لمتوالية. احسب الحدود الأربعة الأولى، ثم افحص هل التعريفان هما لنفس المتوالية.

	حسب المكان	حسب القانون التراجعي
أ)	$a_n = 5n - 1$	$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + 5 \end{cases}$
	ــ ــ ــ ــ	ــ ــ ــ ــ
ب)	$a_n = 2n$	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 \end{cases}$
	ــ ــ ــ ــ	ــ ــ ــ ــ
جـ)	$a_n = 7 - 3n$	$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} - 3 \end{cases}$
	ــ ــ ــ ــ	ــ ــ ــ ــ

12. أ) القانون حسب المكان لمتوالية هو: $a_n = 4 - 3n$.
احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

ب) اكتب الحدود في سطر وأضف ثلاثة حدود أخرى.

جـ) اكتب القانون التراجعي $\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

د) احسب $a_{20} =$ $a_{70} =$

13. القانون حسب المكان لمتوالية هو: $a_n = 2 \cdot 3n$

أ) احسب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

ب) اكتب الحدود في سطر وأضف ثلاثة حدود أخرى.

جـ) - اكتب، كيف ينتج كل حد من الحد الذي يسبقه.
- اكتب المتوالية بمساعدة قانون تراجعي. $\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$

د) احسب a_{12} و a_{15} .

14. أ) $a_n = n^2 + n$ احسب a_1 , a_2 , a_3 , a_{10} .

ب) $a_n = \frac{n+4}{2}$ احسب a_1 , a_4 , a_{12} .

جـ) $a_n = (n-1)(n+2)$ احسب $a_1 , a_2 , a_{10} , a_{15}$.

د) $a_n = n(n+1)(n+2)$ احسب a_1 , a_2 , a_{10} .

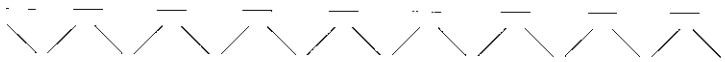
15. أ) احسب الحدود الثمانية الأولى من المتوالية $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$a_{\square} = \frac{\square(\square - 1)}{2}$$

$$a_{\square} = \frac{\square(\square - 1)}{2}$$

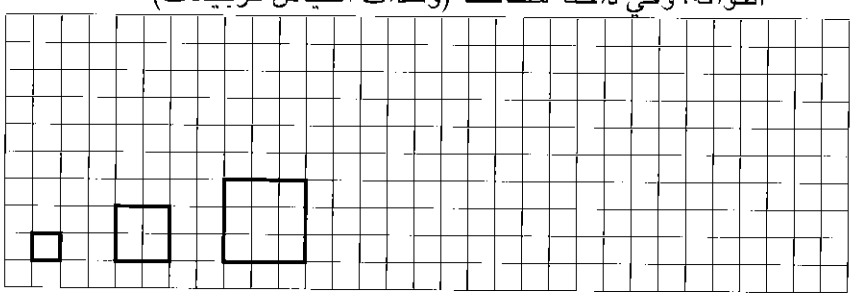
استمر . . .

اكتب الحدود في سطر وسجّل متوالية الفروق أيضاً.



ب) في أحد البنود السابقة، تعاملت مع مسألة مصافحات الأيدي بين أعضاء ناد. المتوالية الأصلية في هذه المسألة تبيّن عدد المصافحات التي تمّت (بدءاً من وصول الأول الى الاجتماع). ماذا تبيّن متوالية الفروق؟

16. أ) استمر في بناء مربعات أخرى، ثم سجّل على أضلاع كل واحد منها أطواله، وفي داخله مساحته (وحدات القياس تربيعات).



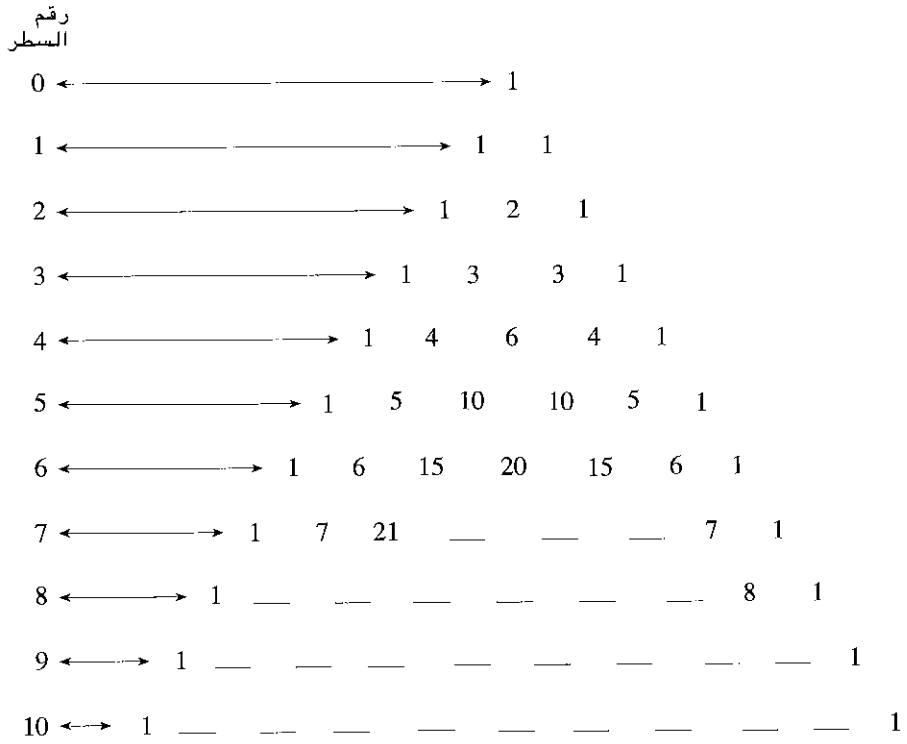
ب) اكتب قالباً يُعرّف متوالية المساحات (حسب n).

جـ) اكتب متوالية تبيّن محيطات المربعات

د) اكتب قالباً يعرّف متوالية المحيطات.

هـ) اكتب قانوناً تراجعياً لمتوالية المحيطات $\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$.

17. أ) يدعى المثلث الذي أمامك "مثلث باسكال". أكمل السطر 7 .



القانون هو: كل عدد ينتج من جمع العددين المتجاورين في السطر فوقه.

ب) أكمل مثلث باسكال حتى السطر العاشر.

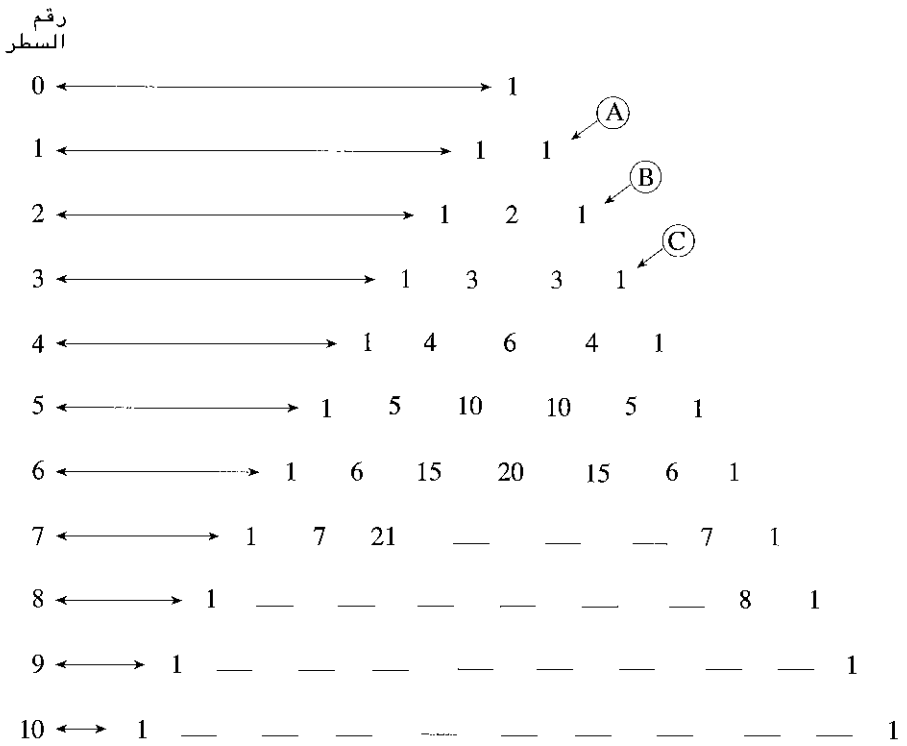
جـ) احسب مجموع كل سطر وسجل متوالية المجاميع.

1 , 2 , 4 , ___ ___ ___ ___ ___

د) اكتب قانوناً تراجعياً، يمكن بواسطته ايجاد حدود متوالية المجاميع.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_n = \end{cases}$$

هـ) اكتب في سطر حدود "القطر" المشار اليه بالحرف A. ما هو العدد "من هذا القطر" الذي يقع في السطر 20؟؟



و) اكتب في سطر حدود "القطر" B. وأضف 3 حدود أخرى اليها، ثم **حاول** ان تكتب قانوناً تراجعياً لهذه المتوالية.

ز) اكتب في سطر حدود "القطر" C. حاول ان تضيف 3 حدود أخرى لهذه المتوالية.

المتوالية الحسابية

1. أ) احسب الحدود الخمسة الأولى من كل متوالية.

$a_n = 5 + 2n$ (i)

$a_n = 3n - 1$ (ii)

$a_n = 10 - 2n$ (iii)

ب)اكتب قانوناً تراجعياً لكل متوالية.

جـ) ما هي الصفة المشتركة لجميع هذه المتواليات.

متواليات كهذه تدعى المتواليات الحسابية.

تعريف: في المتوالية الحسابية، ينتج كل حد من الحد الذي يسبقه بواسطة "اضافة" ثابتة.

في هذا البند، سنتعلم طريقة ايجاد القانون حسب المكان الترتيبي، لمثل هذا النوع من المتواليات.

2. امامك متواليات معرّفة بواسطة قوانين تراجعية. بيّن أياً منها حسابية.

أ) $a_1 = 2$ ، $a_n = a_{n-1} \cdot 3$

جـ) $a_1 = 1$ ، $a_n = a_{n-1} + 3$

ب) $a_1 = 10$ ، $a_n = a_{n-1} - 3$

د) $a_1 = 7$ ، $a_n = 10 - a_{n-1}$

- هل يجب ان نعرف قيمة a_1، كي نبيّن ان المتوالية حسابية؟

3. أ) بيّن ما هي الاضافة الثابتة في المتوالية

2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , ...

كي نحدّد قيمة أي حد من المتوالية الحسابية، حسب الحد الأول والاضافة الثابتة، يجب ان نعرف كم مرة أُضيف 3 في الانتقال من الحد الأول (2) حتى هذا الحد.

ب) – كم مرة أُضيف العدد 3 في الانتقال من $a_1 = 2$ حتى a_4؟

– كم مرة أُضيف العدد 3 في الانتقال من $a_1 = 2$ حتى a_6؟

– كم مرة أُضيف العدد 3 في الانتقال من $a_1 = 2$ حتى a_{20}؟

جـ) كم مرة أُضيف العدد 3 في الانتقال من a_1 حتى a_n من المتوالية؟

4. أ) بيّن ما هي الاضافة الثابتة في المتوالية.

– 5 , – 3 , –1 , 1 , ...

– كم مرة يجب زيادة الاضافة الثابتة الى a_1 ، كي نحصل على a_{10}؟

– احسب a_{10}.

– احسب a_{17}.

ب) أكمل:

$a_{25} = -5 + \square \cdot 2 =$

$a_{30} = -5 + \square \cdot 2 =$

$a_n = -5 + (n-1) \cdot 2 =$ فسّر وبسّط.

5. أ) بيّن ما هي الاضافة الثابتة في المتوالية:

12 , 17 , 22 , 27 , ...

ب) أكمل:

$a_{10} = 12 + \square \cdot 5 =$

$a_{27} = 12 + \square \cdot 5 =$

$a_{100} = 12 + \square \cdot 5 =$

جـ) بسّط القانون حسب المكان:

$a_n = 12 + (n - 1) \cdot 5 =$

عوّض في القالب الناتج $n = 100$ وافحص هل بالفعل نتج a_{100} .

6. أ) بيّن ما هي الاضافة الثابتة في المتوالية 7 , 2 , –3 , –8 , –13 , –18

ب) أكمل: $a_7 = 7 + 6 \cdot \square$

"الاضافة" الثابتة

$a_{10} = 7 + 9 \cdot \square$

جـ) بسّط القانون حسب المكان:

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-5) =$

الاضافة الثابتة يمكن ان تكون عدداً **موجباً** أو **سالباً** أو **صفراً**.

د) اكتب خمسة حدود من متوالية حسابية حدها الأول هو 2 و"الاضافة" الثابتة هي 0.

7. الحد الأول من متوالية حسابية هو 3 والاضافة الثابتة هي 6.

أكمل:

$a_5 = 3 + \square \cdot 6 =$

$a_{10} = 3 + \square \cdot 6 =$

بسّط القانون حسب المكان:

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 6 =$

8. الحد الأول من متوالية حسابية هو 3. نرمز الى الاضافة الثابتة بالحرف d.

أكمل:

$a_5 = 3 + \square \cdot d =$

$a_7 = 3 + \square \cdot d =$

$a_n = 3 + (\quad) \cdot d =$

القالب هو:

9. الحد الأول من متوالية حسابية هو 1 والاضافة الثابتة هي d .

أ) أكمل:

$a_5 =$

$a_{10} =$

$a_{100} =$

.
.
.

$a_n =$

ب) القالب هو:

10. نرمز الى الاضافة الثابتة في المتوالية بالحرف d.

أكمل:

$a_5 = a_1 + \square \cdot d$

$a_7 =$

$a_{10} =$

$a_n =$

رأيت في التمارين السابقة انه يمكن التعميم أكثر وايجاد القالب الذي يمكّن من ايجاد قانون حسب المكان لكل متوالية حسابية.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

أو بالكلمات: لايجاد أي حد من متوالية حسابية، يجب ان نضيف الى الحد الأول، "الاضافة" الثابتة عدداً من المرات يقل بـِ 1 عن المكان الترتيبي للحد.

11. عبّر عن حدود المتوالية الحسابية بواسطة a_1 وَ d .

$a_5 = a_1 +$

$a_7 =$

$a_9 =$

$a_{19} =$

$a_{50} =$

12. معطى أن $a_1 = 3$ من متوالية حسابية.

أ) عبّر عن a_{10} وَ a_{20} بواسطة d.

ب) احسب a_{10} وَ a_{20} اذا كان $d = 7$.

13. جد قالباً (بمساعدة n) لكل واحدة من المتواليات الآتية.

مثال: $a_1 = 10$

$d = 7$

بسّط ! $a_n = 7 + (n - 1) \cdot 7 =$

أ) $a_1 = 3$ $d = 10$

ب) $a_1 = -2$ $d = 8$

جـ) $a_1 = 12$ $d = -3$

د) $a_1 = 17$ $d = -3$

تمارين

14. أي من المتواليات الآتية هي متواليات حسابية؟

أ) $-7, -6, -4, -1, 3, 8, 14, \ldots$

ب) $100, 88, 76, 64, 52, 40, 28, \ldots$

جـ) $1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

د) $1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, \ldots$

هـ) $5, 8, 7, 10, 9, 12, 11, 14, 13, 16, \ldots$

و) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$

ز) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots$

ح) $5, 7.5, 10, 12.5, 15, 17.5, \ldots$

15. i) بيّن هل القانون التراجعي يلائم متوالية حسابية.

أ) $a_n = 10 - \frac{a_{n-1}}{2}$

ب) $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2}$

جـ) $a_n = 2a_{n-1} + 10$

د) $a_n = a_{n-1} + 4$

هـ) $a_n = a_{n-1} + 100$

و) $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$

ii) اكتب قانوناً تراجعياً آخر ملائماً للمتوالية الحسابية.

16. عبّر عن حدود المتوالية الحسابية بواسطة a_1 وَ d .

$a_{10} =$ $a_2 =$

$a_{27} =$ $a_3 =$

$a_{30} =$ $a_7 =$

17. جد من كل متوالية حسابية a_2 ، a_3 ، a_{10} ، a_{100}.

أ) $a_1 = 4$, $d = 7$ جـ) $a_1 = 3$, $d = -5$

ب) $a_1 = -3$, $d = 3$ د) $a_4 = 12$, $d = 3$

18. i) اكتب قالباً لكل متوالية حسابية (حسب n).

مثال: $a_1 = 2$, $d = 7$ أكمل ! $a_n = 2 + 7(n - 1) = \ldots$

أ) $a_1 = -2$, $d = 8$ جـ) $a_1 = 12$, $d = 4$

ب) $a_1 = -10$, $d = -4$ د) $a_1 = -1$, $d = 1.5$

ii) اكتب قانوناً تراجعياً للمتوالية من البند (جـ).

iii) حاول ان تكتب قالباً لمتوالية حسابية أخرى. احسب عدداً من الحدود، وافحص هل هي بالفعل حسابية.

19. i) اكتب قالباً لكل متوالية (حسب n).

أ) $a_1 = 3$, $d = 5$ ب) $a_1 = -10$, $d = 5$

ii) اختر a_1 يختلف عما هو في البندين السابقين، واكتب قالباً لمتوالية ثالثة فيها الاضافة الثابتة هي 5 ($d = 5$).
اكتب القانون التراجعي الملائم لكل واحدة من المتواليات الثلاث.

20. في أحد مراكز التدرّب، تُنفّذ في كل يوم 8 تمارين زيادة عما في اليوم السابق. نُفّذ في اليوم السادس 47 تمريناً.

أ) كم تمريناً يُنفّذ في اليوم العاشر للتدرّب؟

ب) كم تمريناً تُفّذ في اليوم الأول؟

عن المتوالية الحسابية أيضاً

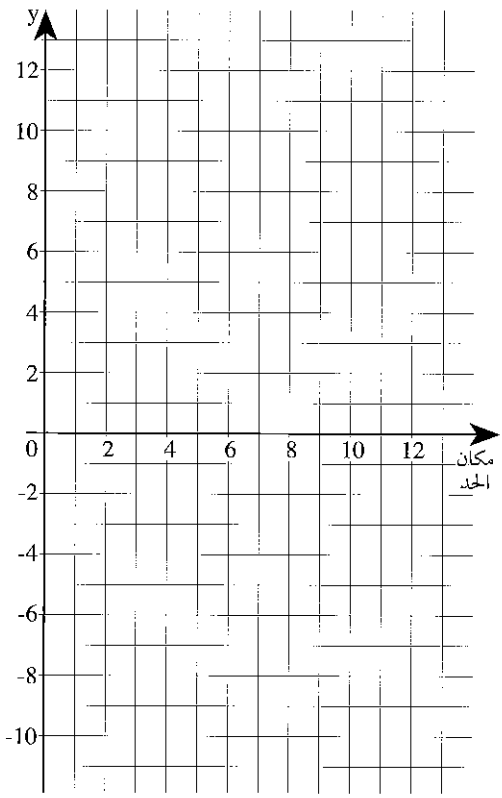
1. جد x , y , . . . بحيث تكوّن الأعداد متوالية حسابية.

أ) 5 , x , 11 جـ) 2 , x , y , z , 30

ب) 1 , x , y , 13 د) – 1 , x , y , w , z , 9

2. أ) جد الحدود الستة الأولى من متوالية فيها $a_1 = -10$ ، $d = 3$

عيّن النقط الملائمة في هيئة المحاور، وأضف ثلاثة حدود اخرى ملائمة من المتوالية.



ب) جد الحدود الستة الأولى من متوالية فيها $a_1 = -2$ ، $d = 3$

- عيّن النقط الملائمة في هيئة المحاور.
- بماذا تختلف وبماذا تتشابه هذه المتوالية مع المتوالية من البند (أ)؟

كيف يظهر التشابه أو الاختلاف بالرسم البياني للمتواليتين؟

جـ) كيف تظهر "الاضافة" الثابتة (d) في الرسم البياني للمتوالية؟

3. أ) معطى متوالية حسابية: 22 , 8 , ___ , ___

أكمل الحدود السبعة الأولى منها.

- اكتب قالباً للمتوالية (حسب n).

ب) معطى من متوالية حسابية: $a_2 = 7$ $a_4 = 20$

اكتب في سطر، الحدود الخمسة الأولى منها.

جـ) معطى من متوالية حسابية: $a_3 = 4$ $a_5 = 0$

- جد الحدود الخمسة الأولى منها.
- اكتب قالباً للمتوالية (حسب n).

4. أ) عبّر عن حدود المتوالية الحسابية بواسطة a_1 وَ d.

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

ب) - عبّر عن مجموع الحدين الأولين بواسطة a_1 وَ d

- عبّر عن مجموع الحدين الثاني والثالث بواسطة a_1 وَ d.
- عبّر عن مجموع الحدين الثالث والرابع بواسطة a_1 وَ d.
- عبّر عن مجموع الحدود الأربعة الأولى بواسطة a_1 وَ d.

5. مجموع الحدين الأولين من متوالية حسابية هو 9 . ومجموع الحدين الثاني والثالث هو 7.

أ) هل حسب رأيك، المتوالية تصاعدية أم تنازلية؟ علّل.

ب) حاول ان تكتب حدود المتوالية، وافحص هل المتوالية تحقق المعطيات.

جـ) أكمل كتابة المعطيات بطريقة جبرية: $\begin{cases} a_1 + a_2 = \\ \end{cases}$

- اكتب المعادلتين بحيث a_1 وَ d هما المتغيران الوحيدان ثم حل.
- اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتوالية.

6. مجموع الحدين الأولين من متوالية حسابية هو 8 . ومجموع الحدين الثالث والرابع هو 24.

أ) اكتب المعطيات بطريقة جبرية.

ب) اكتب معادلات بحيث d وَ a_1 متغيران وحيدان فيها (استعن بالتعابير التي كتبتها في التمرين 4 ب).

جـ) حل وجد d وَ a_1.

د) اكتب قالباً للمتوالية (حسب n).

7. في أي **مكان** يقع الحد المكتوب في آخر المتوالية الحسابية؟

أ) $-4, -1, 2, \ldots\ldots\ldots, 23$

ب) $7, 3, -1, \ldots\ldots\ldots, -25$

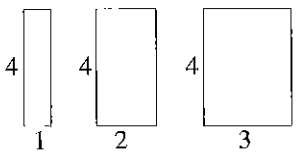
جـ) $3, \ 3+d, \ 3+2d, \ 3+3d\ldots\ldots\ldots, \ 3+12d$

د) $a_1, \ a_1+d, \ a_1+2d, \ \ldots\ldots \ a_1+15d$

هـ) $m, 2m, 3m, \ldots\ldots\ldots, 12m$

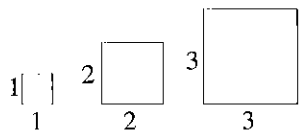
تمارين

8. اكتب ستة حدود من كل متوالية، وبيّن هل هي متوالية حسابية. اذا كان نعم – بيّن مقدار الاضافة الثابتة.



أ) مساحات المستطيلات.
(أحد الأضلاع أكبر بوحدة واحدة.)

ب) محيطات المستطيلات في المتوالية من البند (أ).



جـ) محيطات المربعات.
(أحد الأضلاع أكبر بوحدة واحدة).

د) مساحات المربعات من البند (جـ).

هـ) عدد الشمعات التي تضاء في كل يوم من أيام عيد الأنوار.

9. أمامك متواليات معرّفة بواسطة قوالب ملائمة.

i) أشر بالحرف (ح) الى كل متوالية تظنها حسابية.

ii) احسب الحدود الخمسة الأولى من كل متوالية، وبيّن أياً من المتواليات حسابية.

أ) $a_n = n^2$

ب) $a_n = 5 - 2n$

جـ) $a_n = 2^n$

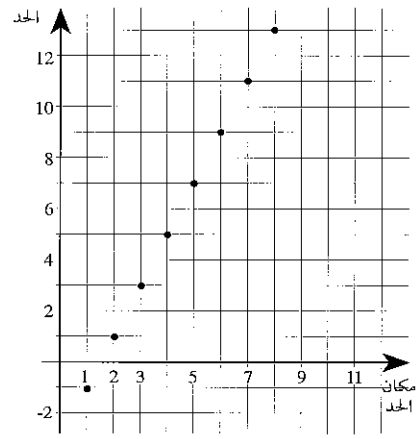
د) $a_n = n$

هـ) $a_n = -n$

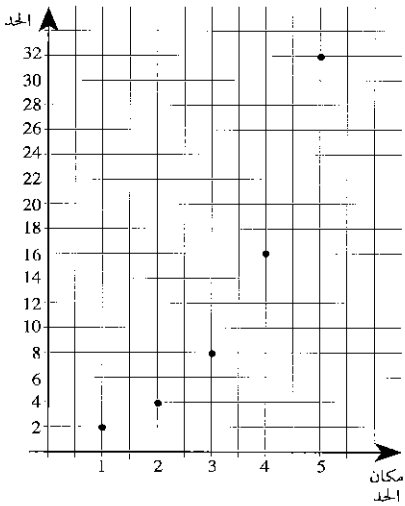
و) $a_n = 4n - 1$

10. "اقرأ" من الرسم البياني، حدود المتوالية وسجّلها.
اكتب ثلاثة حدود اخرى منها، وبيّن هل المتوالية حسابية.

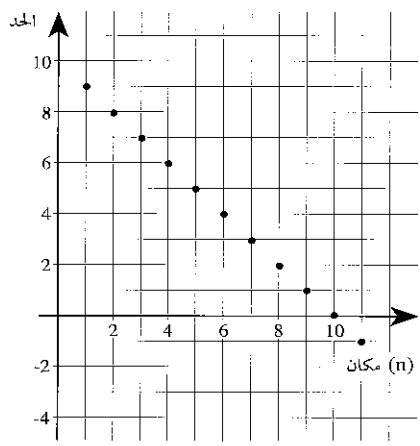
أ)



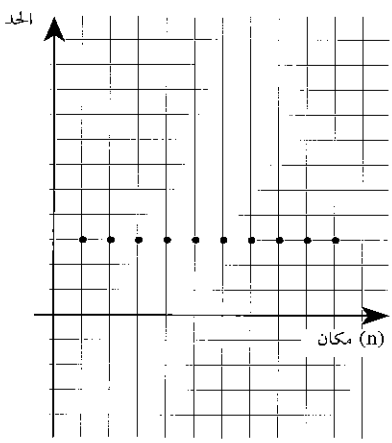
ب)



جـ)

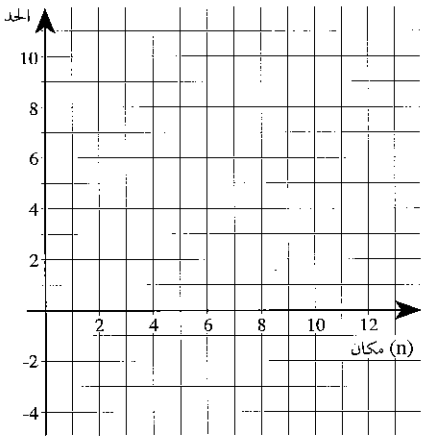


د)



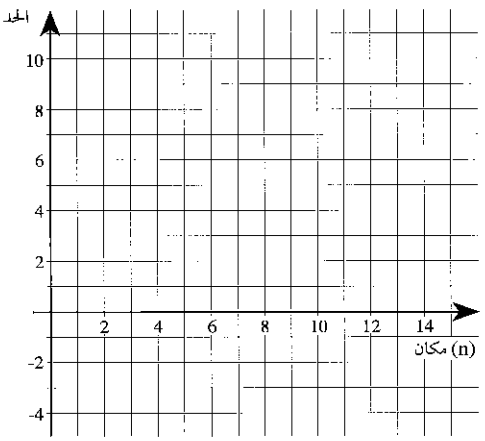
11.أ) ارسم شكلاً بيانياً أياً كان لمتوالية حسابية.

(مختلف عن الرسوم السابقة)



ب) ارسم شكلاً بيانياً لمتوالية ليست حسابية.

(مختلف عن الرسوم السابقة)



12. الحد الخامس من متوالية حسابية هو 5- . والحد الثالث منها هو 1 .

أ) جد الحد الرابع.

ب) جد الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

جـ) جد قالباً للمتوالية.

13. الحد الثالث من متوالية حسابية هو 8 . والحد السادس هو 17.

أ) كم مرة أضيف d في الانتقال من الحد الثالث الى السادس؟

ب) جد الحدود الخمسة الأولى من المتوالية.

جـ) جد قالباً للمتوالية: $a_n =$

14. أ) الحد الأول من متوالية حسابية هو -2 والاضافة الثابتة هي 4.
في أي مكان من المتوالية يقع الحد الذي قيمته 14؟

ب) هل يوجد في المتوالية حد قيمته 35؟ علّل.

جـ) هل يوجد في المتوالية حد قيمته -105؟ علّل.

15. أ) $a_1 = 5 \quad d = 3$ هل يوجد في المتوالية حد قيمته 38؟
اذا كان نعم – بيّن في أي مكان يقع، واذا لا علّل.

ب) $a_1 = -1 \quad d = -2$ هل يوجد في المتوالية حد قيمته 11؟
اذا كان نعم – بيّن في أي مكان يقع، واذا لا علّل.

جـ) $a_2 = 2 \quad d = -3$ هل يوجد في المتوالية حد قيمته -28 ؟
اذا كان نعم – بيّن في أي مكان يقع، واذا لا علّل.

د) $a_3 = 1 \quad d = -5$ هل يوجد في المتوالية حد قيمته -10 ؟
اذا كان نعم – بيّن في أي مكان يقع، واذا لا علّل.

16. في متوالية حسابية معطى أن $d = 3 \quad a_n = 50$.

أ) ما هي قيمة الحد a_{n-1} ؟ ما هي قيمة $a_n - 1$؟

ب) ما هي قيمة الحد a_{n-2} ؟ ما هي قيمة $a_n - 2$ ؟

جـ) ما هي قيمة الحد a_{n+1} ؟ ما هي قيمة $a_n + 1$؟

د) ما هي قيمة الجد a_{n+2} ؟ ما هي قيمة $a_n + 2$ ؟

17.ينفّذ رياضي عدداً من تمارين اللياقة البدنية استعداداً للمسابقة.
في اليوم الأول ينفّذ 20 تمريناً، وفي كل يوم آخر ينفّذ تمرينين زيادة عما في اليوم السابق.

أ) كم تمريناً ينفّذ في اليوم العاشر؟ وفي اليوم أل 14؟

ب) - هل معقول ان يُحسب في هذه الحالة a_{50}؟
- حتى أي حد حسب رأيك، من المعقول حساب حدود المتوالية **كمتوالية حسابية**؟ فسّر؟

18. يدوس سائق على فرامل السيارة. قبل الضغط على الفرامل، كانت السيارة تقطع 20 م في كل ثانية، وبعد الضغط عليها كانت تقطع 4 م أقل مما في الثانية السابقة.
- اكتب متوالية الأبعاد التي تقطعها السيارة من لحظة الضغط على الفرامل الى حين توقّفها تماماً.

- كم ثانية تمر حتى تتوقف السيارة؟

- اجمع وجد البعد الذي تقطعه السيارة خلال كل هذه الثواني.

19. يقطع سبّاح في كل يوم 4 بُرك زيادة عما في اليوم السابق، حتى اليوم أل 20.. قطع في اليوم الأول 40 بركة.
كم يقطع في اليوم العاشر؟
كم يقطع في اليوم أل 20؟

20. تركب ريم وسميره الدراجة الهوائية كل يوم. في الأسبوع الأول، تركب البنتان 4 كم كل يوم. وفي كل أسبوع آخر تضيفان عدداً متساوياً من الكيلومترات.

كم كيلومتراً على البنتين ان تضيفا كل أسبوع، اذا ارادتا ان تتوصلا في الأسبوع السابع الى ركوب 16 كم كل يوم؟

21. تُوزع في مسابقة عشر جوائز. الفائز بالجائزة الأولى يحصل على 100,000 شيكل، والفائز بالجائزة العاشرة يحصل على 23,500 شيكل.
متوالية الجوائز هي حسابية.
بكم شيكل تقل كل جائزة عما سبقتها؟

22. معطى في متوالية حسابية: $a_3 = 1$ $a_8 = 8.5$
جد الحدود العشرة الأولى من المتوالية.

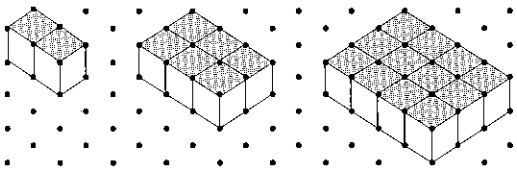
23. تقطع سيارة 24 م في الثانية الأولى بعد الضغط على الفرامل، وفي كل ثانية أخرى 3 م أقل مما في الثانية السابقة.
وتقطع سيارة أخرى 28 م في الثانية الأولى بعد الضغط على الفرامل، وفي كل ثانية أخرى 4 م أقل مما في الثانية السابقة.
أي السيارتين زمن الفرملة لها أقل؟
(احسب كم ثانية تمر حتى تتوقف كل واحدة من السيارتين).

24. i) كم مكعباً في البناء الرابع؟ حاول ان ترسم.

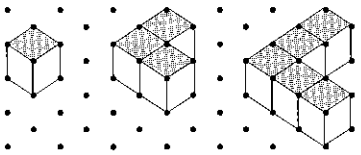
ii) اكتب متوالية أعداد ملائمة لعدد المكعبات، وحاول ان تضيف ثلاثة حدود أخرى. هل من بين هذه المتواليات، توجد متواليات حسابية؟ اذا كان نعم – أيها.

iii) سجّل لثلاث متواليات من الخمسة قانوناً تراجعياً، أو قالباً حسب المكان.

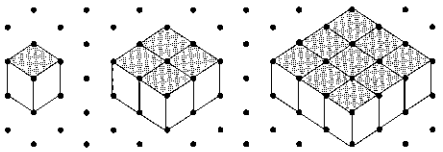
أ)



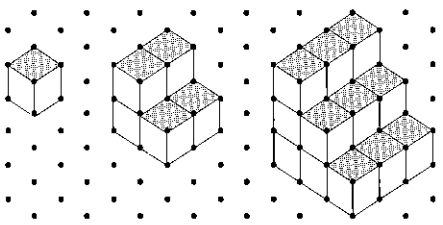
ب)



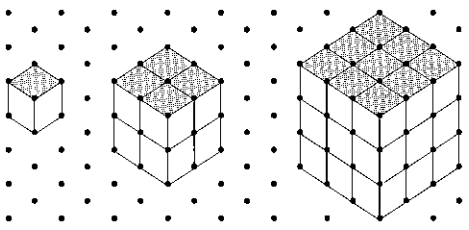
جـ)



د)



هـ)



مجموع المتواليات

1. ما زال أمام عادل سنة واحدة حتى دخول الجامعة. لقد قرّر أن يعمل 10 أشهر في مصنع أبيه لتوفير المال.
اقترح عليه الأب ان يقبض راتبه حسب واحدة من الامكانيات الآتية:

أ) أن يقبض 2000 شيكل كل شهر.

ب) أن يقبض 1000 شيكل في الشهر الأول، وفي كل شهر آخر 200 شيكل زيادة عن الشهر السابق.

جـ) يقبض في الشهر الأول 200 ش.ج. وفي الشهر الثاني 200 ش.ج وفي كل شهر بعد ذلك، راتباً مساوياً لمجموع الراتبين السابقين.

حسب أية واحدة من الامكانيات، يوفر عادل أكثر؟

نرمز لمجموع متوالية بـ S_n .
مثلاً، نرمز لمجموع الحدود العشرة الأولى بـ S_{10} .

2. اكتب كمجموع للحدود.

أ) $S_5 = a_1 + a_2 + \ldots$

ب) $S_7 =$

جـ) $S_1 =$

د) $S_8 = S_5 + \ldots$

هـ) $S_{10} = S_7 + \ldots$

و) $S_{12} = S_{11} + \ldots$

3. امامك متواليات. أكمل كل سطر الى عشرة الحدود الأولى، وجد S_5 و S_8.

أ) $-1 , 4 , 9 , 14 , 19 , \ldots$

ب) $1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \ldots$

جـ) $1 , 2 , 4 , 8 , 16 , \ldots$

د) $1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , \ldots$

هـ) $1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , \ldots$

4. في متوالية حسابية $a_1 = 3$
$d = 4$

أ) احسب الحدود الخمسة الأولى.

ب) احسب S_2 , S_3 , S_4 , S_5.

5. اكتب "صحيح أم غير صحيح".

أ) $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

ب) $S_2 = a_1 \cdot a_2$

جـ) $S_1 = a_1$

د) $S_3 = S_2 + a_3$

هـ) $S_5 = S_4 + a_4$

و) $S_6 = S_4 + a_4 + a_5$

ز) $S_8 = S_6 + a_7 + a_8$

6. أكمل السطر الى عشرة الحدود الأولى من المتوالية.

$1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , ...$

أ) احسب $S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6$ ، اكتبها في سطر.

ب) دون ان تجمع الحدود، حاول ان تخمّن قيمة S_8 ، S_{10} ، افحص بواسطة جمع الحدود.

7. أ) استمر حتى a_{12}

$1 , 2 , 3 , 4 , ...$

ب) احسب $S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 , S_7$.

جـ) اكتب متوالية المجاميع في سطر. ثم سجل ثلاثة حدود أخرى منها.

$1 , 3 , ...$

د) في البنود السابقة، عرفت متوالية تدعى متوالية الأعداد المثلثة. اكتب قانوناً تراجعياً.

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_n = \end{cases}$$

8. أين من المفضل لصبي أن يعمل؟
في "محل البيتسا" (أ) حيث يتقاضى 8 ش.ج مقابل كل ارسالية الى بيوت الزبائن.
أم في "محل البيتسا" (ب) حيث يتقاضى 5 ش.ج مقابل الارسالية الأولى في اليوم، ثم شيكل واحد زيادة عن كل ارسالية أخرى.

أ) أين يكون الربح أكثر إن تُرسل من كل محل 5 ارساليات؟

ب) أين يكون الربح أكثر إن تُرسل من كل محل 8 ارساليات؟

جـ) هل يوجد عدد من الارساليات يكون الربح من العمل في المحلين متساوياً؟

تمارين

9. أكمل الحدود الخمسة الأولى واحسب S_5 .

أ) $1 , 3 , 9 , 27 , \ldots$

ب) $16 , 12 , 8 , 4 , \ldots$

جـ) $2 , 3 , 5 , 8 , 12 , \ldots$

10. أكمل حسب المثال: $S_3 = S_2 + \boxed{a_3}$

أ) $S_4 = S_3 + \square$

ب) $S_5 = S_4 + \square$

جـ) $S_5 = S_3 + \square + \square$

د) $S_5 - S_4 = \square$

هـ) $S_{10} - a_{10} = \square$

11. احسب الحدود الأربعة الأولى من كل متوالية، وجد S_4.

أ) متوالية حسابية: $a_1 = 2$, $d = 3$

ب) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 3 \end{cases}$

جـ) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

وكل حد ابتداء من a_3, ينتج من جمع الحدين السابقين.

د) $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} \cdot n$

هـ) $a_n = n^2 - n$

12. أ) اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتوالية $a_1 = 1$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$

ب) احسب S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6.

جـ) حاول ان تجد S_8 بمساعدة S_6.

13. اكتب **بمساعدة** حدود المتوالية

مثال: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

أ) $S_5 =$

ب) $S_8 = S_6 +$

جـ) $S_1 =$

د) $S_2 =$

14. المتوالية $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \cdots$ هي متوالية حسابية. عبّر عما يأتي بواسطة a_1 و d :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) =$

$S_3 =$

$S_4 =$

$S_5 =$

$S_6 =$

$S_{10} =$

15. أ) أكمل ثم اكتب قالباً ملائماً لمتوالية مجاميع الأسطر في "مثلث باسكال.

رقم السطر		المجموع
"السطر 0"	1	0
السطر 1:	1 1	2
السطر 2:	1 2 1	4
السطر 3:	1 3 3 1	8
السطر 4:	1 4 6 4 1	
السطر 5:	1 5 10 10 5 1	
السطر 6:	1 6 15 20 15 6 1	
السطر 7:	1 7 21 ___ ___ ___ 7 1	
السطر 8:	1 ... ___ ___ ___ ___ ___ 8 1	
السطر 9:	1 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ 1	
السطر 10:	1 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ 1	

ب) ما هو مجموع الأعداد في السطر 12؟

جـ) جد قالباً ملائماً لمجموع الأعداد في أي سطر: $S_n =$

متوالية أخرى

1. قبل 800 سنة، طرح فيبوناتشي المسألة الآتية:
بعد مرور شهرين من الولادة، يبدأ كل زوج من الأرانب بالانجاب.
نفرض أنه في كل شهر يولد زوج جديد.
الأرانب المؤشرة آذانها، بامكانها الانجاب في الشهر القادم.

فور الولادة		عدد الأزواج
بعد شهر		$a_1 = 1$
بعد 2 أشهر		$a_2 = 1$
بعد 3 أشهر		$a_3 = 2$
بعد 4 أشهر		$a_4 =$ ___
بعد 5 أشهر		$a_5 =$ ___
بعد 6 أشهر		$a_6 =$ ___
		$a_7 =$

أ) أكمل السطر "بعد 6 أشهر".

ب) استمر في متوالية عدد الأزواج: اكتب قيم a_7, a_8, a_9
في العمود الى اليسار.

المتوالية من هذا النوع والذي عرفته سابقاً، تدعى متوالية فيبوناتشي. يظهر ان كثيراً من ظواهر الحياة تلائم متوالية كهذه. مثلاً، ترتيب الحبات في قرص عبّاد الشمس أو ترتيب "الأوراق" في كوز الصنوبر.

جـ) أكمل متوالية فيبوناتشي حتى الحد أل 12.

1 , 1 , 2 , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____

د) أكمل واكتب بالكلمات قانون متوالية فيبوناتشي.

$a_5 = a_3 + a_4$

$a_8 =$

$a_{10} =$

$a_{n+1} =$

هـ) اكتب قانوناً تراجعياً ملائماً

2. حاول ان تضيف حدين آخرين لكل متوالية، وبيّن أياً منها يحقق القانون التراجعي لمتوالية فيبوناتشي.

أ) 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , . . .

ب) 1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , 22 , 29 , . . .

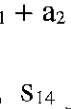
جـ) 2 , 4 , 6 , 10 , 16 , 26 , 42 , 68 , . . .

د) 1 , 2 , 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 , . . .

3. مجموع متواليات فيبوناتشي.

عبّر عن S_4 , S_5 بواسطة a_1 وَ a_2 حسب المثال عن S_3 .

مثال: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + \overbrace{a_1 + a_2}^{a_3} = 2a_1 + 2a_2$



4. استمر حتى تحصل على التعبير S_{14} بواسطة . . . , a_7 , a_5 , a_3 (الحدود في الأمكنة المفردة)

$a_1 + a_2 + \overbrace{a_3 + a_4}^{a_3} + \overbrace{\quad}^{a_5}$

5. أكمل بحيث تحصل على متوالية حسب قانون فيبوناتشي.

أ) __ , __ , __ , 5 , __ , 2

ب) __ , 7 , __ , 3 , __

جـ) __ , __ , 7 , __ , 3

د) __ __ 2 , 9 __

قالب لمجموع متوالية (حسابية)

من الممكن أحياناً، ايجاد قالب لمجموع متوالية (S_n) حسب n.
سوف نرى ذلك في التمارين الآتية.
مثلاً:

1. أ) أكمل واكتب قالباً لمجموع متوالية الأعداد الفردية.

$S_1 = 1 =$
$S_2 = 1 + 3 =$
$S_3 = 1 + 3 + 5 =$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 =$
$S_5 =$
$S_6 =$

القالب: $S_n =$

ب) ما هو مجموع 12 حداً الأولى من المتوالية؟

2. أ) اكتب في سطر، الحدود الثمانية الأولى من المتوالية:

$a_n = 2^n$

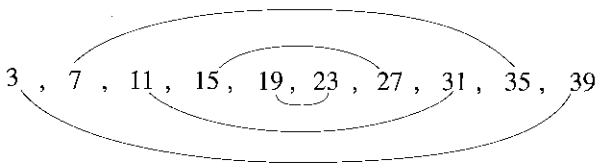
ب) جد S_1 , S_2 , S_3 , ...
ثم اكتب متوالية المجاميع في سطر.

جـ) اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتوالية $S_n = 2 \cdot (2^n - 1)$ ثم قارنها مع متوالية المجاميع من البند (ب).

رأيت في التمرينين، انه في بعض الأحيان **يوجد** قالب حسب المكان يبيّن ليس فقط حداً من المتوالية، وانما أيضاً **مجموع** n الحدود الأولى منها.

في هذا البند، سوف تتعلم كيف تجد مجموع n الحدود الأولى من **كل متوالية حسابية** (S_n).

3. أ) سجّل فوق كل قوس مجموع الحدين اللذين يصل بينهما.



ب) كم زوجاً كهذه الأزواج يوجد في المتوالية ذات العشرة حدود؟
جـ) ما هو مجموع كل العشرة حدود؟

4. أ) استمر في المتوالية الحسابية حتى a_{12}.

-2 , 1 , 4 ,

ب) صل بقوس وجد مجموع الحدين الأول والأخير، الثاني وقبل الأخير وهكذا.
جـ) كم زوجاً كهذه الأزواج يوجد في المتوالية ذات 12 حداً؟
د) ما هي قيمة S_{12} ؟

5. معطى متوالية حسابية:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{20} = 41 \end{cases}$$

أ) احسب: $a_1 + a_{20} =$
ب) كم زوجاً قيمته مساوية لـ $a_1 + a_{20}$ ينتج، إن نصل بين كل زوج من الحدود؟ الحد الأول مع الحد الأخير، الحد الثاني مع الحد قبل الأخير وهكذا.
جـ) جد S_{20}.
د) حاول ان تفسّر لماذا مجموع كل زوج كهذا من المتوالية مساوياً 44 .

6. معطى في متوالية حسابية: $a_1 = 2$
$a_{30} = 89$

أ) – كم زوجاً ينتج إن نصل بين كل زوج من الحدود؟ الأول مع الأخير، والثاني مع قبل الأخير وهكذا.
– ماذا تكون قيمة كل زوج كهذا؟
– ما هو مجموع أل 30 حداً؟

7. في متوالية حسابية عدد زوجي من الحدود.
n يعبّر عن عدد حدود المتوالية.
كم زوجاً ينتج إن نصل بين كل زوج من الحدود؟ الأول مع الأخير، والثاني مع قبل الأخير وهكذا.

لقد رأيت ان المتوالية الحسابية ذات عدد زوجي من الحدود تحقق:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} =$$

8. أ) اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتوالية الحسابية.

3 , 10 , _____ , _____ , _____

ب) صل بين الأزواج وجد S_5 .

جـ) عوّض a_1 و a_5 واحسب: $S_5 = (a_1 + a_5) \cdot \frac{5}{2} =$

د) استمر في المتوالية حتى a_9 ثم صل بين الأزواج واحسب S_9.

عوّض واحسب: $S_9 = (3 + a_9) \cdot \frac{9}{2} =$

9. أ) اكتب الحدود السبعة الأولى من المتوالية الحسابية التي فيها:

$a_1 = 8$

$d = 5$

ب) جد S_7 .

جـ) اذا لم تخطئ فقد وجدت $S_7 = 38$.

هل بعد التعويض في القاعدة ثم الحساب $S_7 = (a_1 + a_7) \cdot \frac{7}{2}$, ينتج $S_7 = 38$ ؟

القاعدة التي وجدتها لحساب مجموع n الحدود الأولى من متوالية حسابية ذات n زوجي، ملائمة بالواقع لايجاد مجموع أي عدد من حدودها.

$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$ n طبيعي.

10. معطى في متوالية حسابية: $a_1 = 8$

$a_9 = 48$

احسب S_9.

11. معطى في متوالية حسابية $a_1 = 12$

$a_{12} = 30$

احسب S_{12} .

12. معطى في متوالية حسابية: $a_1 = 2$
$d = 3$

جد a_{15} وَ S_{15}

(تذكّر: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$)

13. معطى في متوالية حسابية: $a_1 = 10$
$d = -3$

أ) جد a_{10} وَ S_{10}.

ب) جد a_{100} وَ S_{100} .

14. في التمرين 1, من هذا البند، وجدت قالباً لمجموع n الأعداد **الفردية الأولى** التي هي في الواقع متوالية حسابية.

أ) ما هي قيمة a_1 وَ d؟ جد a_{10} أيضاً.

ب) جد S_{10} حسب $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$

جـ) جد S_{10} حسب القالب $S_n = n^2$ (الذي وجدته في التمرين 1) من هذا البند.هل حصلت على نفس النتيجة كما في البند (ب).

د) احسب S_{20} من هذه المتوالية.

15. أ) جد S_{20} من متوالية الأعداد الطبيعية.

1 , 2 , 3 , ...

S_{20} =

ب) جد S_{40} و S_{100} .

جـ) حاول ان تعبّر عن S_n (مجموع n الأعداد الطبيعية الأولى).

لقد وجدت في البند (جـ)، قالباً حسب المكان بمساعدته يمكن ان تحصل على الأعداد المثلثة 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , ... يعني ان متوالية مجاميع الأعداد الطبيعية هي ذاتها متوالية الأعداد المثلثة.

16. تتقاضى شيرين 200 ش.ج في أسبوع العمل الأول. وفي كل أسبوع آخر 50 ش.ج زيادة عن الأسبوع السابق. عملت شيرين مدة 12 أسبوعاً.
كم تقاضت شيرين في الأسبوع الأخير من العمل؟
كم تقاضت في 12 أسبوعاً؟

17. الحد الأول من متوالية حسابية هو 3 .

أ) عبّر بواسطة d عن a_{10} .

ب) عبّر بواسطة d عن S_{10} .

جـ) احسب d اذا كان $S_{10} = 120$.

18. في قاعة الرياضة يوجد 40 مقعداً في الصف الأول. وفي كل صف آخر يوجد 10 مقاعد زيادة عما في الصف الذي يسبقه.

أ) احسب عدد المقاعد في الصف **الخامس** وفي الصف **العاشر**.

ب) في القاعة 50 صفاً من المقاعد.
احسب a_{50} وَ S_{50} .

جـ) ماذا يبيّن a_{50}؟
ماذا يبيّن S_{50}؟

د) ماذا يبيّن a_n من هذه المتوالية؟ وماذا يبيّن n؟

تمارين

19. أ) اكتب متوالية تبيّن عدد الشمعات المستعملة في الأيام الثمانية من عيد الأنوار.

2 , ...

ب) احسب a_8 وَ S_8.

20. احسب a_{10} وَ s_{10} من المتواليات الحسابية.

أ) $a_1 = -2$
$a_{10} = 55$

ب) $a_1 = 10$
$d = 8$

جـ) $a_1 = -3$
$a_2 = 6$

د) $a_2 = 7$
$a_3 = 15$

21. كم يتقاضى فتى في مدة 6 أشهر، اذا كان راتبه في الشهر الأول 1000 ش.ج، وفي كل شهر آخر 200 ش.ج زيادة عن الشهر الذي سبقه؟

22. في الصف الأول من مدرّج يوجد 20 مقعداً، وفي كل صف آخر 4 مقاعد زيادة عما في الصف الذي سبقه.
يوجد في المدرج 24 صفاً.
احسب عدد المقاعد الموجودة في المدرج (احسب أولاً عدد المقاعد في الصف الأخير a_{24}).

23. شاهد سائق قطار من بعيد، رزمة ملقاة على خط السكة. في الحال ضغط على الفرامل لايقاف القطار.
في الثانية الأولى بعد الضغط على الفرامل، قطع القطار 28 م، وفي كل ثانية أخرى 4 م أقل من الثانية السابقة.
أ) بعد كم ثانية توقف القطار؟
ب) ما هي المسافة التي قطعها القطار خلال هذه الثواني؟ (S_n).
جـ) عندما ضغط السائق على الفرامل، كان القطار على بعد 120 م من الرزمة. هل تمكّن القطار من التوقف قبل الوصول الى الرزمة؟ اذا كان نعم – كم متراً قبلها؟

24. يتحرك جسم من النقطة A الى النقطة B. في الثانية الأولى يقطع 4 م، وفي كل ثانية أخرى 3 أمتار زيادة عما في الثانية السابقة.
أ) كم متراً قطع الجسم في الثانية 12؟
ب) كم متراً قطع الجسم في 12 ثانية؟

25. أرادت ريم وسميره أن تخرجا في رحلة الى خارج البلاد. اشتغلت كل واحدة منهما مدة 8 أشهر لتمويل الرحلة.
تقاضت ريم في الشهر الأول 1200 ش.ج، وفي كل شهر آخر 100ش.ج زيادة عن الشهر الذي سبقه.
وتقاضت سميره 1500 ش.ج في كل شهر.
من منهما تقاضت مبلغاً أكبر من المال؟

26. زادت سيارة من سرعتها. في الثانية الأولى بعد ذلك، قطعت السيارة 15 م، وفي كل ثانية أخرى 1.5 م زيادة عن الثانية السابقة.

أ) كم متراً قطعت السيارة في الثانية الرابعة؟
كم متراً قطعت السيارة في الثانية العاشرة؟

ب) ماذا يبيّن a_n من هذه المتوالية؟
في أية ثانية قطعت السيارة مسافة 27 م؟

جـ) ماذا يبيّن s_n من هذه المتوالية؟

د) كم متراً قطعت السيارة خلال 12 ثانية الأولى؟

27. الحد الأول من متوالية حسابية هو 6 .

أ) – عبّر عن a_{15} بواسطة d .
– عبّر عن S_{15} بواسطة d .

ب) – عبّر عن a_{100} بواسطة d .
– عبّر عن S_{100} بواسطة d .

28. الحد الأول من متوالية حسابية هو 4– .

أ) عبّر عن a_{12} بواسطة d .

ب) عبّر عن S_{12} بواسطة d .

جـ) $S_{12} = 150$ جد قيمة d .

29. اشتغل داود في مكتبة وتقاضى أجرته كما يلي:
تقاضى في الأسبوع الأول 200 ش.ج عن عمله، وفي كل أسبوع آخر تقاضى مبلغاً ثابتاً زيادة عن الأسبوع الذي سبقه لمدة 8 أسابيع.

أ) عبّر عن المبلغ الذي تقاضاه داود في الأسبوع الثامن، بواسطة d .

ب) عبّر عن المبلغ الذي تقاضاه في الأسابيع الثمانية، بواسطة d .

جـ) تقاضى داود في كل المدة 3280 ش.ج. ما هي الاضافة الثابتة في كل أسبوع؟

د) كم تقاضى داود في الأسبوع الثامن؟

30. أُعطي لكل من فاديه وهناء عمل في فصل الصيف لمدة 12 يوماً. يمكن لكل واحدة منهما ان تختار شروط الأجرة.
اختارت هناء ان تحصل على 40 ش.ج في اليوم الأول، وتحصل في كل يوم آخر على مبلغ ثابت زيادة عن اليوم السابق.
واختارت فاديه ان تحصل على 150 ش.ج كل يوم.

أ) كم المبلغ الذي حصلت عليه فاديه؟

ب) كم تكون الاضافة الثابتة التي تحصل عليها هناء كل يوم كي تجمع نفس المبلغ الذي حصلت عليه فاديه؟

رمز: استعن بالتعبير الذي حصلت عليه في التمرين 28 (ب).

ايجاد n حسب s_n وَ a_n

1. في متوالية حسابية $a_1 = 2$ $d = 3$

أ) احسب a_2 , a_{10} , a_{100} .

ب) عبّر عن a_n بواسطة n, وبسّط.

جـ) في أي مكان يقع الحد الذي قيمته 128؟

2. عبّر عن a_n بواسطة n, وبسّط.

أ) $a_1 = 3$ $d = 2$

جـ) $a_1 = -5$ $a_2 = -3$

ب) $a_1 = 7$ $d = -4$

د) $a_2 = -3$ $a_3 = -9$

3. الحد الثالث من متوالية حسابية هو 6 والاضافة الثابتة هي 4 .

أ) ما هو الحد الأول من المتوالية؟

ب) احسب a_5 وَ a_{12}.

جـ) عبّر عن a_n.

في أي مكان يقع الحد الذي قيمته 58؟

د) عبّر عن S_n.

هـ) كم حداً يجب ان تجمع كي يكون المجموع 576؟

4. $a_1 = 3$, $d = 4$.

أ) عبّر عن a_n بواسطة n, وبسّط.

ب) عبّر عن S_n بواسطة n .

جـ) كم حداً يجب ان تجمع كي يكون المجموع 820؟

5. الحد الأول من متوالية حسابية هو 7 و"الاضافة" الثابتة هي 4– .

أ) عبّر عن a_n .

ب) عبّر عن المجموع S_n .

جـ) كم حداً يجب ان تجمع كي يكون المجموع 315– ؟

6. في الصف الأول من مسرح يوجد 50 مقعداً، وفي كل صف آخر 6 مقاعد زيادة عما في الصف الذي يسبقه.

أ) احسب عدد المقاعد في الصف **الخامس** وفي الصف **العاشر**.

ب) ماذا يبيّن a_n في هذه المتوالية؟ ماذا يبيّن n؟
عبّر عن a_n بواسطة n.

جـ) ماذا يبيّن S_n في هذه المتوالية؟

د) عبّر عن S_n .

هـ) معلوم أن في القاعة 2140 مقعداً. كم هو عدد الصفوف؟

قليلا عن القوى وعن الحاسبات (تحضير وتذكير)

كل قوة ذات أس طبيعي (... ,1, 2, 3) هي طريقة مختصرة لكتابة ضرب العوامل المتساوية.

1. أكمل:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{\square}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\square}$

$(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^{\square}$

$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{\square}$

2. استعن بعملية الضرب [×] في الحاسبة، واحسب.

$5^4 =$ $\quad$ $(-2)^5 =$

$0.1^2 =$ $\quad$ $(0.5)^2 =$

$1.5^8 =$ $\quad$ $(-4)^6 =$

3. افحص أية قوة هي المقصودة (نفّذ بواسطة الحاسبة وعدّ العوامل).

$4^{\square} = 16384$ $\quad$ $10^{\square} = 1000000$

$5^{\square} = 625$ $\quad$ $2.5^{\square} = 39.0625$

$7^{\square} = 16807$ $\quad$ $1.1^{\square} = 1.4641$

4. أ) بين أي قوتين للعدد 10 يقع العدد 725؟ $10^{\square} < 725 < 10^{\square}$

ب) بين أي قوتين للعدد 5 يقع العدد 250؟ $5^{\square} < 250 < 5^{\square}$

جـ) بين أي قوتين للعدد 3 يقع العدد 250؟ $3^{\square} < 250 < 3^{\square}$

د) بين أي قوتين للعدد 10 يقع العدد 250؟ $10^{\square} < 250 < 10^{\square}$

في التعبير 3^5 العدد 3 هو أساس القوة والعدد 5 أس القوة.

وبشكل عام: في القالب a^n , a هو **أساس القوة** وَ n هو **أس القوة**

مثال: أساس القوة 7 وأس القوة 3. التمرين هو 7^3 .

5. أ) أساس القوة 5 وأس القوة 3, ما هو التمرين؟

ب) أساس القوة 3 وأس القوة 5, ما هو التمرين؟

جـ) أساس القوة 10 وأس القوة 2 , ما هو التمرين؟

د) أساس القوة 8 وأس القوة 1, ما هي النتيجة؟

هـ) أساس القوة 2 وأس القوة 10, ما هو التمرين؟

و) اكتب تمريناً، إن نبدّل فيه بين الأساس والأس، نحصل على نفس النتيجة.
هل يمكنك ان تكتب تمريناً آخر؟

6. يوجد زر في الحاسبة يمكّنك من حساب القوة مباشرة x^y.

أ) احسب:

7	x^y	3	=

التمرين: 7^3

ب) احسب:

2	x^y	11	=

التمرين: _____

جـ) احسب:

$11^3 =$ $9^{10} =$

$(-5)^7 =$ $1.7^8 =$

7. اكتب كقوة.

مثال: $2^3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ (انتبه $2 = 2^1$)

أ) $2^5 \cdot 2^2 =$

ب) $3^3 \cdot 3 =$

جـ) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3 =$

د) $a^4 \cdot a =$

هـ) $a^{12} \cdot a^{30} =$

و) $a^n \cdot a^4 =$

ز) $a^3 \cdot a^k =$

ح) اكتب بالكلمات، قاعدة ملائمة لضرب قوى ذات **نفس الأساس**.

ط) أكمل: $a^n \cdot a^k = a^{\square}$

$2 = 2^1$ $3 = 3^1$ $a = a^1$

ي) أكمل: $a^n \cdot a = a^{\square}$

8. اكتب كقوة

مثال: $\frac{7^4}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 7^2$

أ) $\frac{8^3}{8} =$

ب) $\frac{10^6}{10^3} =$

جـ) $\frac{a^7}{a^2} =$

د) $\frac{b^8}{b} =$

هـ) $\frac{a^{30}}{a^{10}} =$

و) اكتب بالكلمات، قاعدة ملائمة **لقسمة** القوى ذات **نفس الأساس**.

ز) أكمل: $\frac{a^m}{a^k} = a^{\square}$ $(m > k)$

9. عبّر عما يأتي كقوة.

أ) $3^{\square} = 3^2 \cdot 3^7 \cdot 3$

ب) $a^{\square} = a \cdot a^8$

جـ) $6^5 \cdot 6^{\square} = 6^9$

د) $\frac{5^2}{5^2} = 5^{\square}$

هـ) $\frac{a^4}{a} = a^{\square}$

و) $\frac{8^6}{8^{\square}} = 8^4$

تمارين

10. حلّل الى عوامل أولية واكتب كقوة.

مثال: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

أ) $200 =$

ب) $375 =$

11. اكتب أس القوة:

$7^{\square} = 2401$

$(-1.5)^{\square} = 11.390625$

$10^{\square} = 10,000$

12. أ) بين أي قوتين للعدد 10 يقع العدد 1250؟ $10^{\square} < 1250 < 10^{\square}$

ب)بين أي قوتين للعدد 10 يقع العدد 15,200؟ $10^{\square} < 15,200 < 10^{\square}$

جـ)بين أي قوتين للعدد 10 يقع العدد 750؟ $10^{\square} < 750 < 10^{\square}$

د) بين أي قوتين للعدد 10 يقع العدد 150,000؟

هـ)ما هي العلاقة بين عدد أرقام العدد وقوتي العدد 10 اللتين يقع العدد بينهما؟

13. عبّر عما يأتي كقوة.

أ) $a^7 \cdot a =$

ب) $2^{12} \cdot 2^2 =$

جـ) $3^5 \cdot 3^7 \cdot 2^2 =$

د) $7^{12} \cdot 7^5 \cdot 7^3 =$

هـ) $8^n \cdot 8^3 \cdot 8^4 =$

و) $12^n \cdot 12^k =$

ز) أكمل: $6^5 \cdot 6^{\square} = 6^{12}$

ح) أكمل: $a^8 \cdot a^{\square} \cdot a^2 = a^{15}$

ط) $7^8 \cdot 7^{\square} \cdot 7^3 = 7^{12}$

14. عبّر عما يأتي كقوة.

أ) $\frac{5^{18}}{5^5} =$

ب) $\frac{2^{13}}{2^2} =$

جـ) $\frac{4^9}{4^3} =$

د) $\frac{a^{12}}{a^4} =$

هـ) $\frac{6^3 \cdot 6^4}{6} =$

و) $\frac{x^7 \cdot x^3}{x} =$

ز) $\frac{7^5 \cdot 7}{7^2} =$

ح) $\frac{x^2 \cdot x^3}{x^4} =$

15. أ) اكتب كقوة للعدد 3 (أكمل الأس).

$9 = 3^{\square}$ $729 = 3^{\square}$

$81 = 3^{\square}$ $19683 = 3^{\square}$

ب) اكتب كقوة للعدد 2 (أكمل الأس).

$64 = 2^{\square}$ $128 = 2^{\square}$

$4 = 2^{\square}$ $16384 = 2^{\square}$

$4096 = 2^{\square}$ $2 = 2^{\square}$

16. أكمل.

مثال: $675 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^{\boxed{3}} \cdot 5^{\boxed{2}}$

أ) $72 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$ د) $5000 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$

ب) $432 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$ هـ) $2025 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

جـ) $225 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$ و) $2700 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

17. اكتب كحاصل ضرب قوى للعدد 2, و/ أو للعدد 3, و/ أو للعدد 5 .

أ) 225 = د) 2000 =

ب) 648 = هـ) 10125 =

جـ) 375 = و) 1800 =

لخط الكسر توجد أيضاً وظيفة القوسين، لذلك يمكن حساب كل من البسط والمقام على انفراد ثم القسمة، أو كتابة القوسين:

$$3^5 \cdot 2^3 : (4^2 \cdot 5) \qquad \frac{3^5 \cdot 2^3}{4^2 \cdot 5} =$$

18. أ) احسب: $\frac{3^5 \cdot 2^3}{4^2 \cdot 5} =$

ب) $\frac{5.2^3 \cdot 4^3}{0.4 \cdot 5^2} =$

جـ) $\frac{19}{0.3^2 \cdot 7} =$

د) $\frac{5^4 + 4^3}{18^2} =$

هـ) $\frac{12^3}{4.5^2 + 7^3} =$

أعداد كبيرة في الحاسبة

1. أ) اكتب العدد

مثال: $10^2 = 100$

$10^4 =$

$10^7 =$

$10^8 =$

ب) نفّذ بواسطة الحاسبة وسجّل ما يظهر في العارض.

$10^4 =$

$10^9 =$

$10^{13} =$

$10^{18} =$

جـ) خمّن بدون استعمال الحاسبة، ماذا يظهر في العارض.

$10^{15} =$ ☐

$10^{25} =$ ☐

افحص بواسطة الحاسبة.

د) نفّذ تمريناً بواسطة الحاسبة، بحيث تظهر في العارض النتيجة المسجلة في الاطار، ثم اكتب التمرين.

$1.^{22}$

$1.^{34}$

هـ) هل يمكن ان تحصل على 10^{123} في العارض؟

و) ما هي أكبر قوة للعدد 10 التي يمكن ان تظهر في عارض الحاسبة؟ اكتب تمريناً بحيث تحصل على هذا العدد، وافحص بواسطة الحاسبة.

2. أ) احسب بواسطة الحاسبة.

في العارض

$10^5 \cdot 10^7 =$ [ ] $= 10^{\square}$

$10^{13} \cdot 10^8 =$ [ ] $= 10^{\square}$

$10^{23} \cdot 10^{14} =$ [ ] $= 10^{\square}$

ب) اكتب كقوة وخمّن النتيجة التي تظهر في العارض.

$10^{20} \cdot 10^9 =$

$10^{13} \cdot 10^{25} =$

افحص.

3. افحص، كم رقماً في العدد.

أ) 10^7

ب) 10^{12}

جـ) $1.^{14}$

د) $1.^{43}$

عدد المنازل في عارض الحاسبة محدود.
افحص بواسطة حاسبتك: اضغط 1 حتى يمتلئ العارض.

في التمارين الآتية، سترى كيف يمكن بواسطة "الأرقام الصغيرة" أيضاً كتابة أعداد كبيرة ليست قوى للعدد 10.

4. أكمل:

التمرين	بدون حاسبة	في العارض
$37 \cdot 10^5 = 3{,}700{,}000 =$	$3.7 \cdot 10^{06}$	**مثال:**
$7 \cdot 10^{10}$		أ)
$5 \cdot 10^8$		ب)
$32 \cdot 10^{10}$		جـ)
$3.5 \cdot 10^8$		د)
$0.67 \cdot 10^{11}$		هـ)

5. اكتب تمريناً بحيث تحصل في العارض على النتيجة المسجلة في الاطار.

أ) النتيجة $2.3 \cdot 10^{12}$ التمرين: افحص.

ب) النتيجة $1. \cdot 10^{10}$ التمرين: افحص.

جـ) النتيجة $7. \cdot 10^{20}$ التمرين: افحص.

د) اكتب تمريناً آخر نتيجته كتلك من البند (جـ).

6. أكمل:

التمرين	التمرين في العارض	في العارض
مثال:	$7 \cdot 10^9$	$7. \cdot 10^{09}$
$70 \cdot 10^8$	أ)	
$700 \cdot 10^8$		
$7000 \cdot 10^8$		
$70{,}000 \cdot 10^8$		

النتيجة في العارض هي دائماً عدد بين1 وَ 10 مضروب في قوة للعدد 10.

يتبع

	التمرين في العارض	في العارض
ب)	$3.5 \cdot 10^8$	
	$35 \cdot 10^8$	
	$350 \cdot 10^8$	

"الأرقام الصغيرة" تبيّن كم خطوة الى اليمين، على الفاصلة العشرية ان "تتحرك".

7. أ) احسب بواسطة الحاسبة وسجل النتيجة داخل الاطار.

$0.27 \cdot 10^{15}$	$2.7 \cdot 10^{25}$	$27 \cdot 10^{14}$	$270 \cdot 10^8$

ب) أي عدد كتابته لم "تتغير"؟

جـ) أي عدد كتابته لا "تتغير" عند تنفيذ العملية في الحاسبة؟

$36 \cdot 10^9$, $0.36 \cdot 10^8$, $360 \cdot 10^{10}$, $3.6 \cdot 10^3$

8. سجل ما يظهر في العارض عند تنفيذ التمرين في الحاسبة وافحص.

أ)	$30 \cdot 10^{12}$	3. □
ب)	$500 \cdot 10^{15}$	
جـ)	$8000 \cdot 10^{10}$	
د)	$7.2 \cdot 10^{12}$	
هـ)	$720 \cdot 10^{15}$	
و)	$1952 \cdot 10^{13}$	

تمارين

9. اكتب النتيجة كقوة للعدد 10 وسجّل كيف تظهر في العارض.
(لا تظهر دائماً النتيجة في عارض الحاسبة بكتابة القوى).

أ) $10^5 \cdot 10^7 = 10^{\square} =$ ☐

ب) $10^{15} \cdot 10^3 = 10^{\square} =$ ☐

جـ) $100 \cdot 10^{17} = 10^{\square} =$ ☐

د) $10^{31} \cdot 10 = 10^{\square} =$ ☐

هـ) $10^5 \cdot 10^4 \cdot 10^7 = 10^{\square} =$ ☐

و) $\frac{10^7}{10^2} = 10^{\square} =$ ☐

ز) $\frac{10^{12}}{10^4} = 10^{\square} =$ ☐

ح) $\frac{10^{18} \cdot 10^2}{10^{10}} = 10^{\square} =$ ☐

ط) $\frac{10^7 \cdot 10^{12}}{10^3} = 10^{\square} =$ ☐

ي) $\frac{10^8 \cdot 10^{10}}{10} = 10^{\square} =$ ☐

10. اكتب العدد، ليس بكتابة القوى.

مثال: $3.65 \cdot 10^3 = 3650$

$2.7 \cdot 10^3 =$

$12.56 \cdot 10^5 =$

$0.05 \cdot 10^4 =$

11. جد العدد المختلف في كل سطر.

أ)

$0.02 \cdot 10^{12}$	$200 \cdot 10^8$	$0.2 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{11}$

ب)

$5.6 \cdot 10^6$	$0.056 \cdot 10^9$	$560 \cdot 10^4$	5,600,000

12. أكمل.

	في العارض	تمرين	بدون حاسبة
أ)		$9 \cdot 10^{11}$	
ب)		$4.7 \cdot 10^8$	
جـ)			7,8000,000
د)	2.4^{13}		
هـ)	6.5^{09}		

13. سجل في الاطار = أو ≠ بحيث تنتج قضية صواب.

أ) $10 \cdot 10^{11} \square 10^{11}$

ب) $560 \cdot 10^{8} \square 5.6 \cdot 10^{10}$

جـ) $2.7 \cdot 10^{3} \square 2700$

د) $2.7 \cdot 10^{3} \square 27 \cdot 10^{4}$

14. احسب بالحاسبة. سجل ما يظهر في العارض واكتب العدد بكتابة القوى.

أ) $5^{15} =$ 1.22 9 $= \square \cdot 10^{\square}$

ب) $3^{20} =$ [ ] $=$

جـ) $7.2^{12} =$ [ ] $=$

15. أ) أشر الى الأعداد المساوية لِ 5. 12

$50 \cdot 10^{11}$ 12^{5} 5,000,000,000,000 $5 \cdot 10^{12}$

5^{12} 5.12

ب) أشر الى الأعداد المساوية لِ 3.5 03

$3.5 \cdot 10^{3}$ $35 \cdot 10^{3}$ 3.5^{3} 35000 3500

16. اكتب تمريناً بحيث تظهر في العارض النتيجة المسجلة في الاطار.

أ) النتيجة: 1.5 [12] التمرين:

ب) النتيجة: 2.53 [10] التمرين:

جـ) النتيجة: 7.645 [11] التمرين:

د) النتيجة: 8.1111 [10] التمرين:

هـ) اكتب تمريناً آخر نتيجته كتلك من البند (د).

المتوالية الهندسية

1. أضف ثلاثة حدود لكل متوالية واكتب قانوناً تراجعياً.

أ) $2 , 6 , 18 , \ldots$

$a_1 =$

$a_n = a_{n-1} \cdot \square$

ب) $0.01 , 0.1 , 1 , 10 , \ldots$

$a_1 =$

$a_n =$

جـ) $64 , 32 , 16 , 8 , \ldots$

$a_1 =$

$a_n =$

د) $1 , -2 , 4 , -8 , \ldots$

$a_1 =$

$a_n =$

في جميع المتواليات من التمرين 1, كان القانون التراجعي من الصورة $a_n = a_{n-1} \cdot \square$ يعني أن كل حد من المتوالية (ابتداء من a_2) ينتج من ضرب الحد السابق في نفس العدد. نرمز الى عامل الضرب الثابت بالحرف q فينتج:

$a_n = a_{n-1} \cdot q$. مثل هذه المتوالية تدعى **متوالية هندسية**.

2. بيّن هل المتوالية هندسية.
اذا كان نعم – سجّل قيمة q (عامل الضرب الثابت).

أ) 2 , 8 , 32 , 128 , 512 . . .

ب) 1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 3.5 . . .

جـ) – 1 , 2 , – 4 , 8 , – 16 , 32 . . .

د) 10 , 100 , 1000 , 10,000 , 100,000 . . .

هـ) 100 , 200 , 300 , 400 , 500 , 600 . . .

و) $5 , 5^2 , 5^3 , 5^4 , 5^5$ . . .

ز) $8 , 4 , 2 , 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4}$ . . .

3. أكمل بحيث تحصل على متوالية هندسية (6 حدود من كل متوالية).

أ) 3 , ___ , 12 , ___ , 48 , ___

ب) 2 , ___ , 200 , . . .

جـ) ___ , ___ , 50 , 250 , ___ , ___

د) 2 , ___ , ___ , 16 . . .

4. أ) أكمل بحيث تحصل على متوالية **هندسية**. 2 , ___ , 8

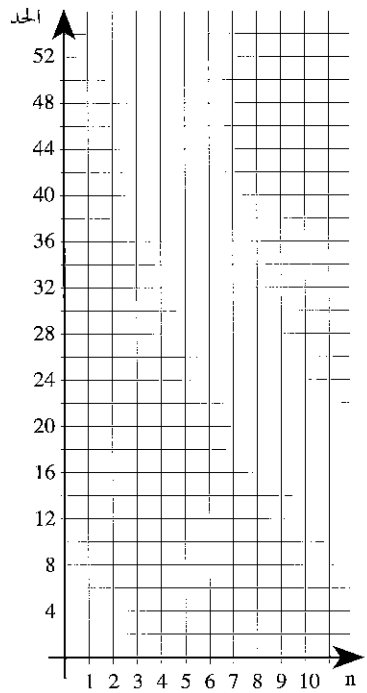
ب) أكمل بحيث تحصل على متوالية **حسابية**. 2 , ___ , 8

جـ) أكمل بحيث تحصل على متوالية **هندسية**. 1 , ___ , ___ , 64

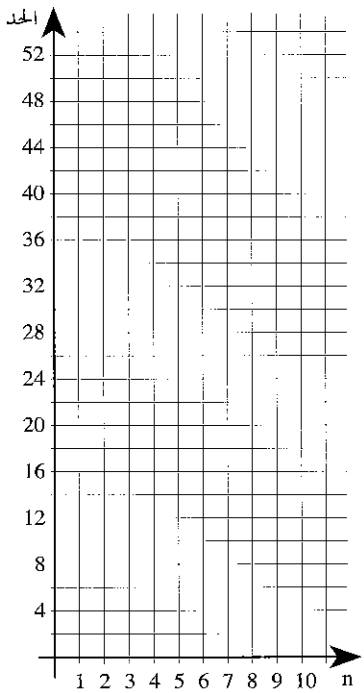
د) أكمل بحيث تحصل على متوالية **حسابية**. 1 , ___ , ___ , 64

5. أكمل ستة حدود من كل متوالية، وبيّن هل هي متوالية هندسية ثم عيّن حدودها في هيئة المحاور.

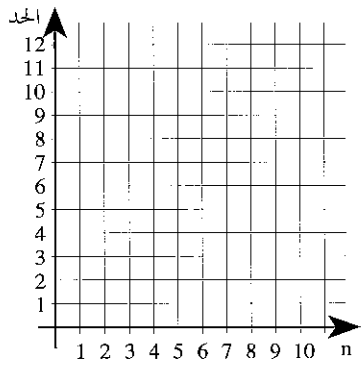
أ) 1 , 2 , 4 , 8 , ___ , ___ ,



ب) 48 , 24 , 12 , 6 , ___ , ___ ,



جـ) –1 , 1 , 3 , 5 , ___ , ___ ,



6. أ) معطى في متوالية هندسية: $a_1 = 3$

(عامل الضرب) $q = 2$

جد:

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

ب) معطى متوالية هندسية: $a_1 = 3$

عبّر عن الحدود بواسطة q.

مثال: $a_2 = 3q$

$a_3 = 3 \cdot q^2$

$a_4 =$

$a_5 =$

جـ) أكمل. $a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 =$

$a_5 =$

$a_6 =$

.

$a_{30} =$

د) – كم مرة يظهر عامل الضرب q في قالب a_8؟

– كم مرة يظهر عامل الضرب q في قالب a_{50}؟

بشكل عام: في المتوالية الهندسية

$n - 1$ مرات

$a_n = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{} = a_1 \cdot q^{n-1}$

7. احسب a_6 من متوالية هندسية، حسب المعطيات.

أ) $a_1 = 1$, $q = 3$

ب) $a_1 = 0.5$, $q = 4$

جـ) $a_1 = 2$, $q = -3$

د) $a_2 = 10$, $q = 3$

8. لمتوالية حسابية ولمتوالية هندسية نفس الحد الأول: $a_1 = 6$.

أ) عبّر عن a_5 من المتوالية **الهندسية** بواسطة q .
عبّر عن a_5 من المتوالية **الحسابية** بواسطة d .

ب) عبّر عن a_8 من المتوالية **الهندسية** اذا كان $q = 2$.
عبّر عن a_8 من المتوالية **الحسابية** اذا كان $d = 2$.

جـ) عبّر عن a_5 من المتوالية **الهندسية** اذا كان $q = 3$.
ماذا يجب ان تكون قيمة d في المتوالية الحسابية ليكون a_5 منها مشابهاً لِ a_5 من المتوالية الهندسية الذي وجدته.

تمارين

9. سجّل (هـ) الى جانب كل متوالية **هندسية**.
سجّل (ح) الى جانب كل متوالية **حسابية**.
سجّل (أ) الى جانب كل متوالية **اخرى** (ليست حسابية او هندسية).

أ) 0.2 , 2 , 20 , 200 , 2000 , 20,000 . . .

ب) 2 , 12 , 22 , 32 , 32 , 42 . . .

جـ) 2 , – 20 , 200 , – 2000 , 20,000 . . .

د) 2 , 10 , 12 , 20 , 22 , 30 , 32 . . .

هـ) 2 , – 2 , 2 , – 2 , 2 , – 2 , 2 . . .

10. أ) أكمل بحيث تحصل على متوالية **هندسية**.

2 , ___ , 50

–2 , ___ , – 50

3 , ___ , ___ , 81

– 1 , ___ , ___ , 1000

ب) أكمل بحيث تحصل على متوالية **حسابية**.

2 , ___ , 50

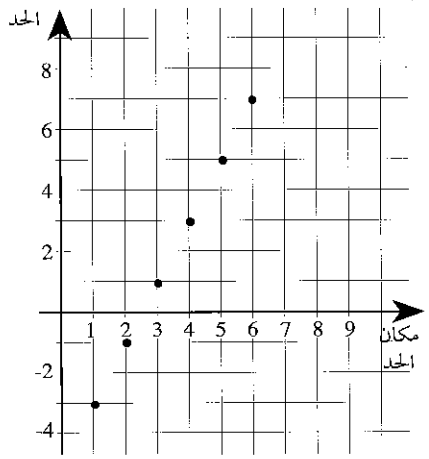
– 2 , ___ , – 50

3 , ___ , ___ , 81

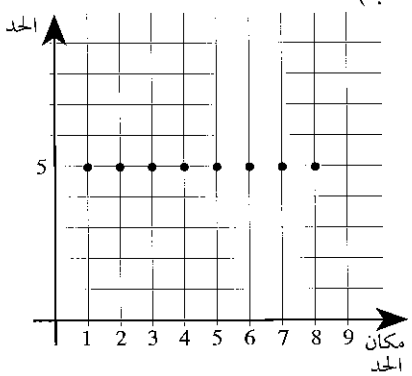
2 , ___ , ___ , 1000

11. – اكتب حدود المتوالية حسب الرسم البياني، وأضف 3 حدود اخرى.
– سجّل (هـ) الى جانب كل متوالية هندسية.
– سجّل (ح) الى جانب كل متوالية حسابية.
– سجّل قانوناً تراجعياً أو قانوناً حسب المكان لكل متوالية.

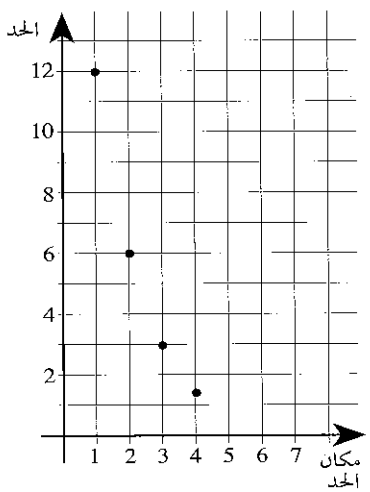
أ)



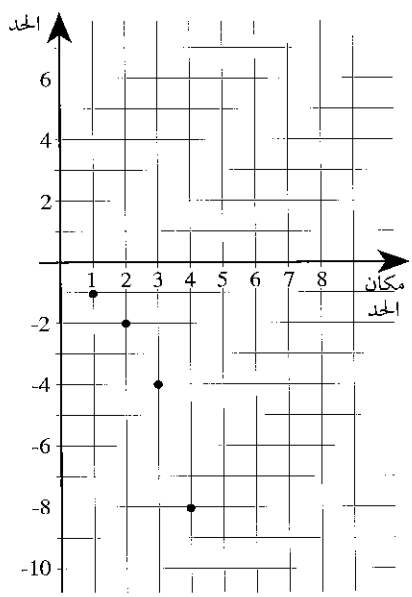
ب)



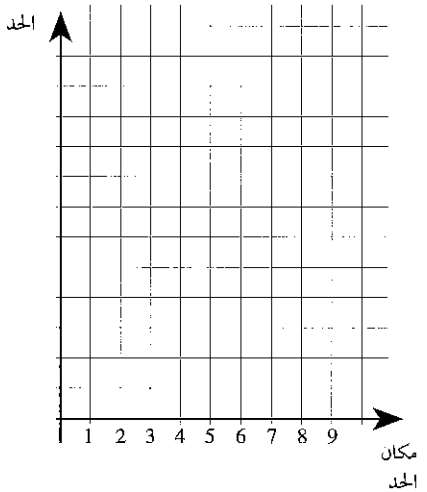
جـ)



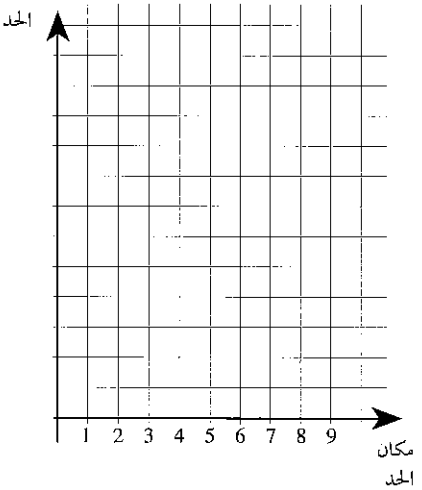
د)



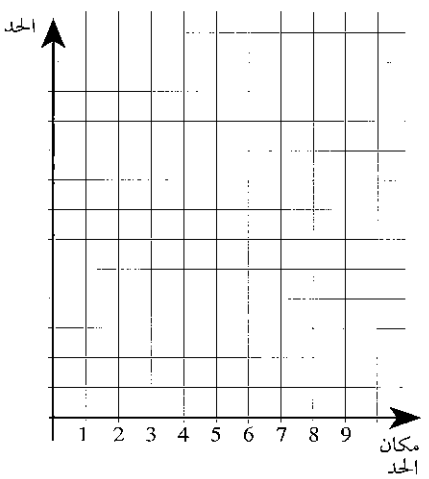
12. أ) ارسم شكلاً بيانياً لمتوالية **هندسية** (سجّل الوحدات على محور y).



ب) ارسم شكلاً بيانياً لمتوالية **حسابية** (سجّل الوحدات على محور y).



جـ) ارسم شكلاً بيانياً لمتوالية **ليست** هندسية أو حسابية (سجّل الوحدات على المحور y).



13. أ) معطى في متوالية هندسية: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ q = 4 \end{cases}$

احسب a_8 وَ a_9.

ب) معطى في متوالية هندسية: $\begin{cases} a_3 = 18 \\ a_4 = 54 \end{cases}$

أكمل سطر الحدود . . . . , ___ , 54 , 18 , ___ , ___

حتى a_8.

لحل التمارين الآتية، يمكنك الاستعانة بتسجيل المتوالية في سطر على الشكل الآتي: الاشارة الى الحدود المجهولة بخط - وكتابة الحدود المعطاة في الأماكن الملائمة.

14. معطى في متوالية هندسية: $a_3 = 50$ $a_5 = 1250$

سجّل: 1250 , ___ , 50 , ___ , ___

جد q , وَ a_4 وَ a_1.

15. معطى في متوالية هندسية: $a_1 = 4$
$q = 3$

في أي مكان من المتوالية يقع الحد الذي قيمته 2916؟

16. معطى في متوالية هندسية: $a_1 = -2$
$q = 7$

- في أي مكان من المتوالية يقع الحد الذي قيمته 4802 -؟
هل يوجد في المتوالية حد هو عدد فردي؟ علّل.

17. معطى في متوالية هندسية: $\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_4 = 2.5 \end{cases}$

أ) جد قيمة q, وَ a_2 وَ a_3.

ب) في أي مكان من المتوالية يقع الحد الذي قيمته 0.675؟

18. مساحة بقعة من الزيت الآن هي 2304 متر مربع. بسبب معالجة الأمر لاخفاء البقعة، تصغر مساحة بقعة الزيت بمرور كل سنة 0.75 مرة.

أ) أكمل متوالية مساحات بقعة الزيت على مدار السنوات.

اليوم

_____ , _____ , _____ , 2304 , _____ , _____

ب) كم تكون مساحة بقعة الزيت بعد مرور سنة واحدة، وبعد مرور 4 سنوات؟

جـ) كم كانت مساحة بقعة الزيت قبل سنة؟

د) كم كانت مساحة بقعة الزيت قبل سنتين؟

هـ) هل حسب رأيك، تختفي بقعة الزيت ذات مرة؟

عن المتواليات أيضاً

1. نشر تقرير لبرنامج التوفير "الكنز". يبيّن التقرير انه في السنوات الأخيرة، كل مبلغ استثمر في هذا البرنامج كبر 1.2 مرة كل سنة.
كان ليوسف في السنة الأولى مبلغ 1000 ش.ج.
ما هو المبلغ المسجل ليوسف اليوم، في السنة العاشرة؟
(اقتراح: سجّل سطراً لحدود المتوالية).

2. يكبر مبلغ من المال يُستثمر في البنك. بمقدار 10% خلال سنة واحدة.

أ) استثمر مبلغ 200 شيكل في البنك. كم تكون قيمته بعد سنة؟
ب) **كم مرة** كبر مبلغ 200 ش.ج خلال السنة؟
جـ) **كم مرة** يكبر **كل** مبلغ خلال سنة واحدة؟

في نهاية السنة الأولى كان المبلغ المستثمر 12100 ش.ج.
د) كم يصبح هذا المبلغ في نهاية السنة الثانية؟ وفي نهاية الثالثة؟
هـ) اكتب حدود المتوالية في سطر.
كم يصبح المبلغ في نهاية السنة العاشرة؟
و) كم كان المبلغ في **بداية** السنة الأولى؟

3. معطى في متوالية **هندسية**: $a_1 = 1.5$ $a_3 = 24$.

أ) احسب q و a_7.
ب) معلوم أن $a_9 = 98304$ جد a_{10} ؟
جـ) معلوم أن $a_{12} = 6{,}291{,}456$ جد a_{11}.
د) اكتب القانون التراجعي لهذه المتوالية.

4. معطى في متوالية **حسابية**: $a_1 = 4$ $a_5 = 44$

أ) احسب d و a_{10}.
ب) اكتب القانون التراجعي لهذه المتوالية.

5. في متوالية هندسية معطى أن $a_1 = 3$ ومجموع الحدين الأولين 15 .
جد q, (جد a_2 أولاً).
اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتوالية.

تمارين

6. من كل جرثومة تيتانوس واحدة تنتج جرثومتان خلال دقيقة واحدة.
وضع باحث عدداً من الجراثيم في صحن. في الدقيقة الأولى كان في الصحن 1000جرثومة.
كم جرثومة يكون في الصحن في الدقيقة 5؟
كم جرثومة يكون فيه في الدقيقة 10؟
وكم يصبح فيه بعد ساعة؟

7. تنتشر نبتة لتغطي مساحة أكبر 1.5 مرة خلال شهر.
كانت المساحة التي تغطيها النبتة بعد ثلاثة أشهر 18 م^2 .
أكمل: ___ , 18 , ___ , ___
كم كانت المساحة التي تغطيها النبتة في الشهر الأول؟
كم تكون المساحة في الشهر 12؟ (في نهاية السنة)

8. أخذ رجل قرضاً من البنك وفي كل سنة قلّل دينه بمقدار 10%.
في بداية السنة الأولى كان دينه 20,000 ش.ج.

أ) كم يكون دينه في **نهاية** السنة الأولى؟
ب) كم مرة قلّ الدين خلال سنة؟
جـ) كما وجدت في البند (أ)، كان دين الرجل في **نهاية** السنة الأولى 18,000 ش.ج. كم يكون الدين في **نهاية** السنة الثالثة؟
د) كم يكون الدين في **نهاية** السنة العاشرة؟
هـ) افحص، بعد كم سنة يكون الدين أقل من 10000 ش.ج للمرة الأولى.

9. ثلاث متواليات معرّفة بواسطة القانون التراجعي.

(i $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{cases}$ (ii $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 4 \end{cases}$ (iii $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$

أ) جد a_5 من كل متوالية.

ب) احدى هذه المتواليات **هندسية**، جد a_6 منها.

جـ) احدى هذه المتواليات **حسابية**، جد a_{20} منها.

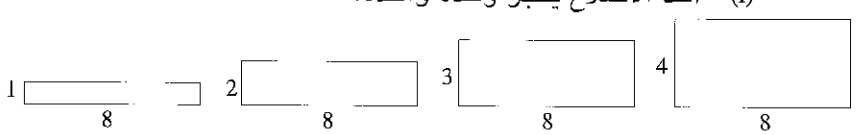
10. معطى $a_n = a_{n-1} \cdot 4$

الحد الثاني من المتوالية هو 12 .

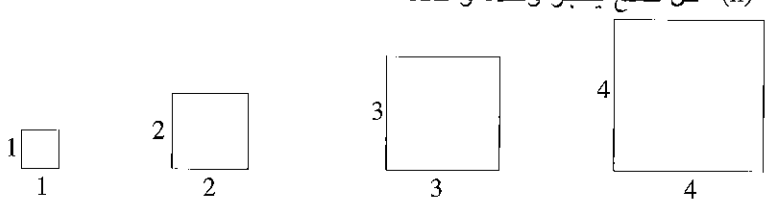
جد a_1 و a_{10} .

11. أ) اكتب متوالية أعداد تبيّن مساحات المستطيلات (من **الأول** حتى **الثامن**) من كل واحدة من المتواليتين المرسومتين.

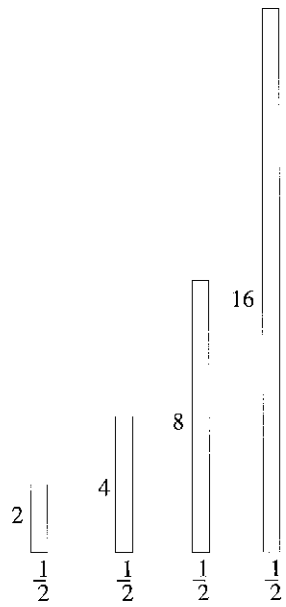
(i) أحد الأضلاع يكبر وحدة واحدة.



(ii) كل ضلع يكبر وحدة واحدة.



(iii) أحد الأضلاع يكبر مرتين.



ب) أي من هذه المتواليات حسابية وأيها هندسية؟

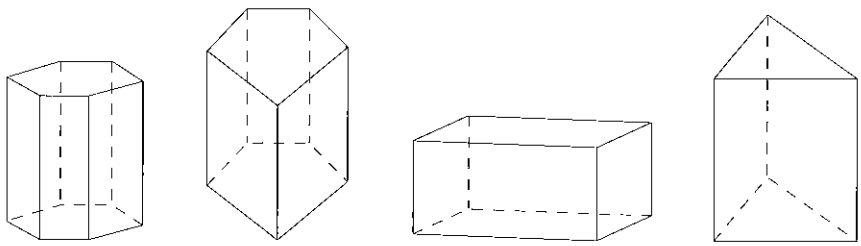
جـ) - حدود أية متوالية تكبر "أسرع"؟
- ابتداء من أي مكان، المساحات المبيّنة في هذه المتوالية أكبر من المساحات المبيّنة في المتواليتين الاخريين؟

د) احسب القانون حسب المكان لكل متوالية.

هـ) - اكتب متواليات أعداد تبيّن محيطات المستطيلات في كل متوالية (حتى المستطيل الثامن).
- حاول ان تكتب قانوناً لكل متوالية.

12.في وحدة تعليمية عن هندسة الفراغ، أُحصي عدد الأقطار في منشورات ذات قواعد مختلفة.

عدّت لينا حسب طريقة معينة، وسجّلت عدد أقطار كل منشور تحته.



مثلث – القاعدة	رباعي – القاعدة	خماسي – القاعدة	سداسي – القاعدة
0	1 · 4	2 · 5	3 · 6

أ) حاول ان تفسّر الطريقة التي عدّت لينا حسبها.

ب) كم عدد الأقطار في المنشور الذي قاعدته مضلع ذو:

7 أضلاع؟ 8 أضلاع؟ 9 أضلاع؟ 10 أضلاع؟

تمارين مراجعة (متواليات هندسية وحسابية)

1. أ) استمر في تسجيل 5 حدود بحيث تحصل على متوالية **هندسية**.

3 , 6 , ___ , ___ , ___ .

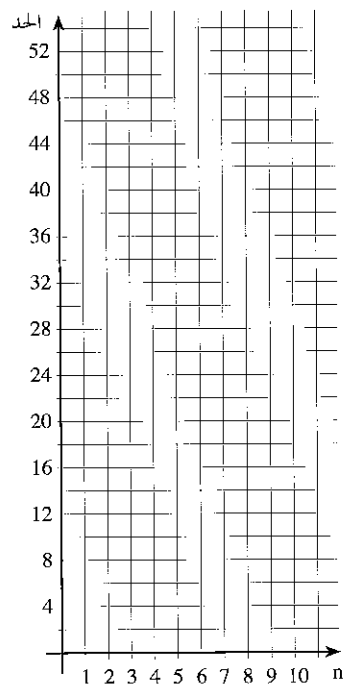
ارسم في هيئة المحاور.

ب) استمر في تسجيل 5 حدود بحيث تحصل على متوالية **حسابية**.

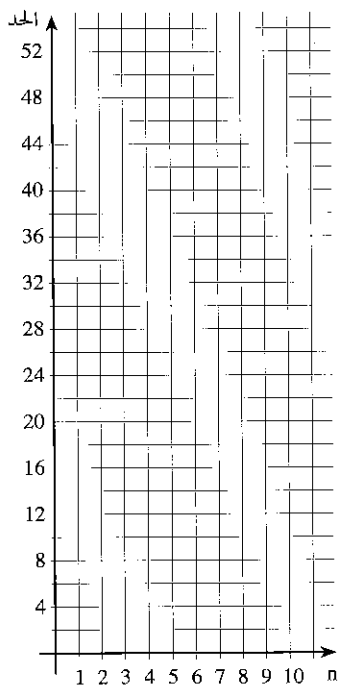
3 , 6 , ___ , ___ , ___ .

ارسم في هيئة المحاور.

أ)



ب)



2. أكمل بحيث تحصل على متوالية **هندسية** واكتب قانوناً تراجعياً لكل متوالية.

أ) 10 , ___ , 160 , ___

ب) 12 , ___ , 3 , ___

جـ) 2 , – 3 , ___ , –6.75

د) 6 , ___ , ___ , 1296

3. أكمل بحيث تحصل على متوالية **حسابية** واكتب قانوناً تراجعياً لكل متوالية.

أ) 2 , ___ , 8 , ___

ب) 12 , ___ , 2 , ___

جـ) 4 , ___ , ___ , 13

4. أ) عبّر عن الحد المطلوب من المتوالية **الهندسية** بواسطة q والحد الأول.

مثال: $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$a_7 =$ $a_{100} =$

$a_{51} =$ $a_{10} =$

ب) معطى قانون تراجعي: $a_n = a_{n-1} \cdot 7$

- أكمل: $a_5 = a_1 \cdot$ ___ $a_{100} = a_1 \cdot$ ___
- ما هي قيمة q ؟

5. عبّر عن الحد المطلوب من المتوالية **الحسابية** بواسطة الاضافة الثابتة d والحد الأول.

مثال: $a_4 = a_1 + 3d$

$a_{72} =$ $a_{10} =$ $a_7 =$

6. سجّل الحد المبيّن من كل متوالية هندسية. ما هو a_1 وما هو عامل الضرب الثابت (كل حد مسجل بالصورة: $a_n = a \cdot q^{n-1}$)

أ) $a_{\square} = 3 \cdot 5^8$ جـ) $a_{\square} = 5 \cdot 2^{11}$

ب) $a_{\square} = 2 \cdot (-3)^7$ د) $a_{\square} = 7^{10}$

7. سجّل الحد المبيّن من كل متوالية هندسية.

$a_{\square} = a_1 \cdot q^{12}$ $a_{\square} = a_1 \cdot q^8$

8. أ) الحد الأول من متوالية **هندسية** هو 3 وعامل الضرب الثابت هو 4. احسب a_5 .

ب) الحد الأول من متوالية **حسابية** هو 3 والاضافة الثابتة هي 4 . احسب a_5 .

9. أ) معطى في متوالية هندسية: $\begin{cases} a_1 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$

في أي مكان من المتوالية يقع الحد الذي قيمته 160؟

ب) معطى في متوالية حسابية: $\begin{cases} a_1 = 10 \\ d = 2 \end{cases}$

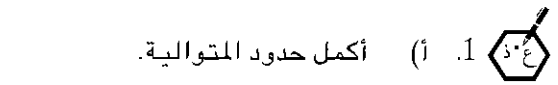
في أي مكان من المتوالية يقع الحد الذي قيمته 160؟

10. نبتة متسلقة تكبر في الغابة. في كل اسبوع يصبح ارتفاع النبتة 1.2 مرة من ارتفاعها في الأسبوع السابق.
في نهاية الأسبوع الأول بعد الانبات كان ارتفاع النبتة 4 سم.
كم يكون ارتفاعها بالسنتمترات في نهاية الأسبوع العاشر؟
كم يكون ارتفاعها بالسنتمترات في نهاية الأسبوع العشرين؟

11. نبتة متسلقة تكبر في حديقة 2 سم كل أسبوع.
في نهاية الأسبوع الأول (بعد الغرس) كان ارتفاع النبتة 4 سم.
كم يكون ارتفاعها بالسنتمترات في نهاية الأسبوع العاشر؟
كم يكون ارتفاعها بالسنتمترات في نهاية الأسبوع العشرين؟

الفصل الثاني – من المتواليات الى الدوال الأسية

وماذا "قبل الحد الأول"؟



1. أ) أكمل حدود المتوالية.

___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , 27 , 9 , 3

ب) في أي مكان يقع 6561؟

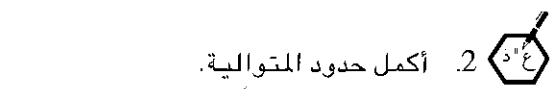
جـ) أكمل: $a_{\square} = 729$.

د) أي عدد يقع في المكان العاشر؟

هـ) أكمل: $a_5 =$ ___.

و) هل الأعداد الآتية هي من هذه المتوالية؟ اذا كان نعم – في أي مكان؟ واذا لا علّل!

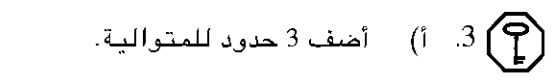
81 , 324522 , 1 , –81 , 297 , 729



2. أكمل حدود المتوالية.

أ) ___ , ___ , ___ , 64 , 32 , 16 , 8 ___ , ___ , ___ , ___

ب) , ___ , ___ , 5 , 25 , 125 , 625 , ___ , ___ , ___ , ___



3. أ) أضف 3 حدود للمتوالية.

___ , ___ , ___ , 49 , 7

ب) لو تتابع المتوالية الى اليسار، ماذا يكون الحد **قبل** 7؟

جـ) ما هو الحد الذي يسبق هذا الذي وجدته في البند (ب)؟

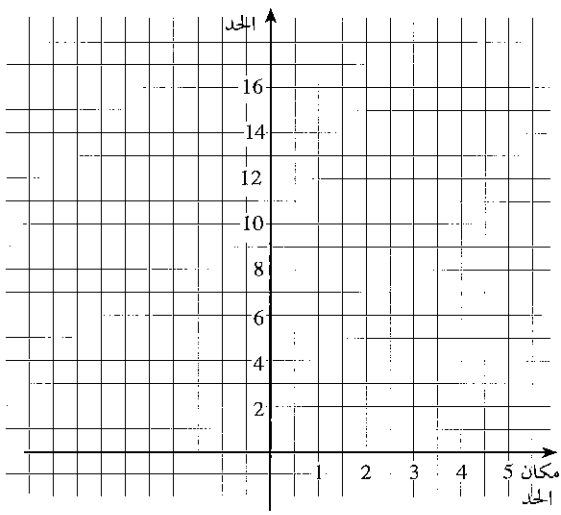
إن نحدّد في متوالية معينة أن $a_1 = 7$ فقد حدّدنا أن في هذه المتوالية لا توجد حدود قبل 7. ورغم ذلك، يمكننا متابعة المتوالية الى اليسار (كما فعلت بالتأكيد). سنحاول في التمارين الآتية ان نعطي معنى لِ "مكان" حدود مثل هذه.

4. أ) أكمل حدود المتوالية.

مكان الحد: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

الحد في المتوالية: 2 , 4 , 8 , ___ , ___ , ___

ب) عيّن الحدود الأربعة الأولى في هيئة محاور.



جـ) – تابع المتوالية الى اليسار مع ذكر "أمكنة" هذه الحدود.

المكان: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ___ , ___ , ___

الحدود: 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , ___ , ___ , ___

– سجّل "الأمكنة" على محور x. أيضاً (عن يسار الصفر).

– أضف نقطاً ملائمة في هيئة المحاور.

حتى هذا التمرين، رأيت ان الرسم البياني لمتوالية هو فقط لقيم x صحيحة وموجبة، وذلك لأن مكان الحد في المتوالية يُسجّل بأعداد صحيحة موجبة.

د) – ما هو الحد الواقع في "المكان 3–"؟

– ما هو المكان الملائم للحد $\frac{1}{16}$ ؟

– ما هو الحد الواقع في "المكان 0"؟

القانون الملائم للمتوالية من التمرين السابق هو 2^x. حتى الآن، عرفت ان تعريف القوة هو كضرب لنفس العامل، ولذلك فان x في التعبير 2^x هو دائماً صحيح وموجب.
تُعرّف القوة أيضاً لأس سالب أو صفر، بحيث تلائم متابعة المتوالية الى اليسار والرسم البياني للنقط التي عيّنتها.

5. أكمل.

مكان الحد: ___ ___ ___ ___ 0 ___ ___ 3– 4–

الحد كقوة: ___ , 2^3 , 2^2 , 2^1 , ___ , ___ , ___ , 2^{-3} , 2^{-4}

الحد: ___ , ___ , $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 4 , 8 , 16

مكان الحد: ___ ___ ___ 0 ___ 2– ___ ___ ___

الحد كقوة: ___ , ___ , ___ , ___ , 10^{-1} , ___ , ___ , ___ , ___

الحد: ___ , ___ , $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1 , 10 , 100 , 1000

6. أكمل:

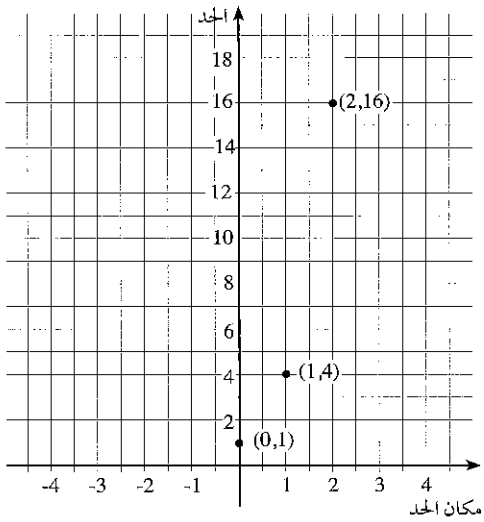
الحد كقوة: ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , 5^{-2} , ___

الحد: ___ , ___ , ___ , 1 , 5 , 25 , 125

7. في هيئة المحاور أمامك معيّنة ثلاث نقط.

أ) بيّن أياً من القوانين الآتية يلائم النقط المعيّنة.

$y = 2^x$ $y = 4^x$ $y = 8^x$



ب) جد: – ما هو الحد في "المكان 4"؟

– ما هو الحد في "المكان 1–"؟

– ما هو الحد في "المكان 2–"؟

– ما هو الحد في "المكان 3–"؟

جـ) هل حسب رأيك، يمكن ان يوجد في هذه المتوالية حد سالب؟ فسّر.

د) هل حسب رأيك، يمكن ان يوجد في هذه المتوالية حد قيمته 0؟ فسّر.

8. اكتب على شكل كسر واحسب قيمة المقام.

مثال: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

أ) $4^{-2} =$ د) $8^{-1} =$

ب) $7^{-1} =$ هـ) $12^{-2} =$

جـ) $10^{-2} =$ و) $4^{-3} =$

لقد رأيت في هذا البند كيف يمكن توسيع عملية الرفع الى القوة الى الأس 0 أو الى أس سالب.

لكل a موجب

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^o = 1$

تمارين

9. قانون متوالية هو 3^x .

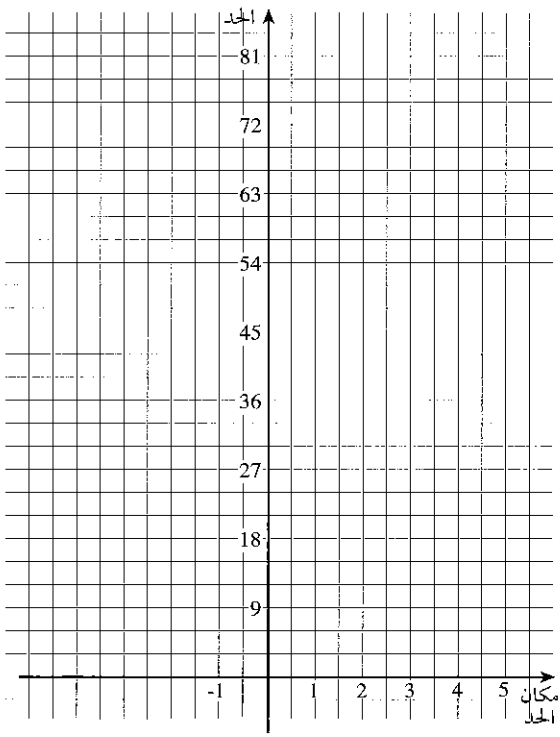
أ) أكمل.

مكان الحد: 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , ___ , ___ , ___

الحد: ___ , ___ , ___ , ___ , 9 , 3 , ___ , ___ , ___

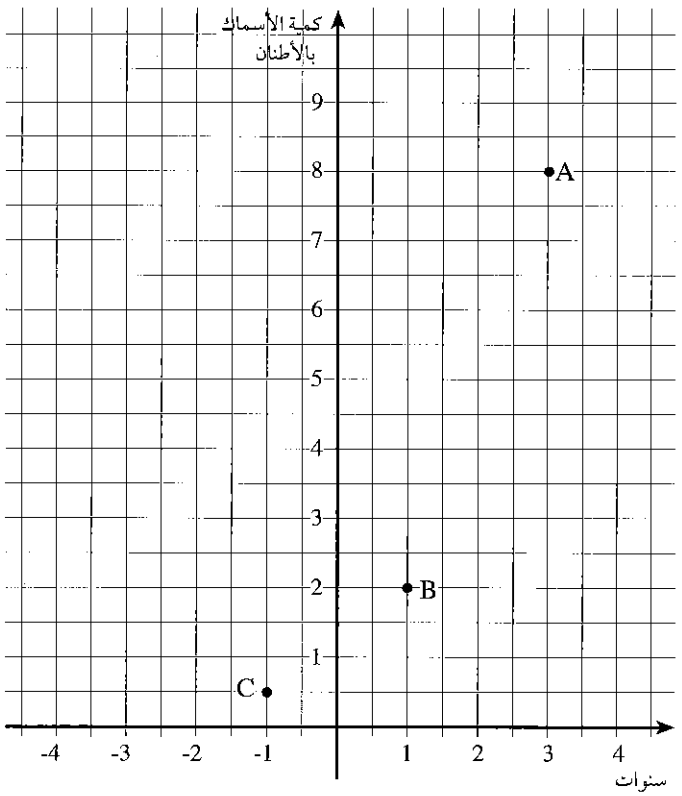
الحد كقوة: ___ , ___ , 3^4 , 3^3 , 3^2 , 3^1 , ___ , ___ , 3^{-2}

ب) عيّن في هيئة المحاور، حدود المتوالية وأمكنتها على المحور الأفقي.



10. في بركة لتربية السمك يوجد اليوم طن واحد من سمك الكاربيون.
تزداد كمية السمك في البركة كل سنة الى الضعفين.
تُظهر النقط التي في الرسم البياني عملية ازدياد السمك في البركة.

أ) أكمل: معنى النقطة A هو، بعد 3 سنوات تصبح كمية السمك في البركة _____ طناً.
ما هو معنى كل واحدة من النقطتين B وC؟



ب) أكمل الجدول:

بعد/ قبل ... سنوات			1	0	−1		
وزن السمك في البركة (طنات)					1/2		

جـ) هل صحيح أم خطأ؟

- بعد سنتين تزداد كمية السمك الى الضعفين.
- قبل سنة واحدة كانت في البركة نصف كمية السمك الموجودة اليوم.
- بعد ثلاث سنوات تزداد كمية السمك الى 8 أضعاف.

11. اكتب على شكل كسر واحسب.

مثال: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

أ) $6^{-1} =$ ب) $4^{-2} =$ جـ) $3^{-2} =$

د) $10^{-2} =$ هـ) $5^{-3} =$ و) $3^{-1} =$

12. اكتب كقوة أسها صحيح (موجب أو سالب).

أ) $125 =$ د) $\frac{1}{10^5} =$

ب) $10{,}000 =$ هـ) $\frac{1}{216} =$

جـ) $\frac{1}{5^3} =$ و) $\frac{1}{81} =$

13. أكمل. حلّل أولاً البسط والمقام الى العوامل المسجلة عن يمين اشارة التساوي.

أ) $144 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$

ب) $\frac{1}{144} = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$

جـ) $500 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$

د) $\frac{1}{5000} = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$

هـ) $\frac{1}{2025} = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

و) $\frac{81}{128} = \frac{3^{\square}}{2^{\square}}$

ز) $\frac{10125}{64} = \frac{3^{\square} \cdot 5^{\square}}{2^{\square}}$

ح) $1 = 5^{\square}$

14. حل. (جد قيمة x.)

أ) $2^x = 64$

ب) $3^x = \frac{1}{3}$

جـ) $3^x = 81$

د) $4^x = \frac{1}{4}$

هـ) $5^x = \frac{1}{625}$

و) $3^x = \frac{1}{243}$

ز) $6^x = 1$

ح) $7^x = \frac{1}{343}$

ط) $10^x = 0.0001$

ي) $8^x = 1$

15. أ) كي تحسب قيمة 5^{-2} بواسطة الحاسبة، اضغط

5	x^y	2	+/−	=

ب) خمّن كم ستكون النتيجة، ثم افحص بواسطة الحاسبة

i) $2^{-2} =$ ii) $5^{-1} =$ iii) $\frac{1}{8^{-1}} =$

iv) $0.5^{-1} =$ v) $0.1^{-1} =$ vi) $0.2^{-1} =$

جـ) حل

i) $0.1^x = 0.0001$ ii) $10^x = 0.0001$

iii) $5^x = 0.2$ iv) $2^x = 0.5$

قوانين القوى لأس صحيح

1. تعلمت في البند السابق القانون التالي:

$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$ عندما m أكبر من k .

k, m أعداد صحيحة موجبة.

اكتب كقوة.

أ) $\frac{5^{12}}{5^7} =$

ب) $\frac{10^{12}}{10^6} =$

جـ) $\frac{a^m}{a^3} =$ $(m > 3)$

د) $\frac{a^{13}}{a^k} =$ $(k < 13)$

2. نفحص الآن، هل يتحقق القانون عندما m أصغر من k .

أكمل.

أ) (i) $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} = a^{\square}$

(ii) $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{\square}$

ب) (i) $\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{\qquad} =$

(ii) $\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} =$

جـ) (i) $\frac{a^5}{a^5} = 1$

(ii) $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^{\square}$

تُعرّف القوة لأس سالب بحيث قوانين القوى لأس طبيعي تنطبق أيضاً عليها. يعني أن لكل m وَ k صحيحين يتحقق:

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$$

يمكن البرهنة أيضاً ان القانون $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ صحيح لكل أس صحيح.

3. اكتب كقوة للعدد 2 أو 3 ثم ككسر.

مثال: $2^5 \cdot 2^{-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

أ) $\frac{2^3 \cdot 2^{-1}}{2^8} =$ جـ) $\frac{2}{2^{-3}} =$

ب) $\frac{3^4 \cdot 3^{-2}}{3^2} =$ د) $\frac{2^3 \cdot 3^{-2}}{3^2 \cdot 2} =$

تمارين

4. عبّر عما يأتي كحاصل ضرب قوى للعددين 3 وَ 5 .

أ) $\frac{75 \cdot 125}{27 \cdot 45} =$

ب) $\frac{225 \cdot 3^6}{3^7 \cdot 81} =$

5. اكتب الاشارة الملائمة في المربع: = أو ≠.

أ) $\frac{2^{-3}}{2^3} \square 1$

ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \frac{1}{2^3} \square 2^{-3}$

جـ) $\frac{1}{3^4} \square 3^{-4}$

د) $\frac{2^{-3} \cdot 2^6}{2^3} \square 1$

هـ) $6^{-3} \square -6^3$

و) $2^{-4} \square \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

6. بسّط:

أ) $\frac{a^{-3} \cdot a^8}{a^2} =$

ب) $\frac{a^4 \cdot b^3 \cdot a^{-2}}{a^3 \cdot b^{-2}} =$

جـ) $\frac{a^2 \cdot c^5 \cdot a^{-3}}{a \cdot c^{-4}} =$

د) $\frac{a^5}{a^5} =$

هـ) $\frac{a^3}{a^{-7}} =$

و) $\frac{a^7}{a^{-7}} =$

7. حل المعادلات:

أ) $2^x = \frac{1}{4}$

ب) $5^x = \frac{1}{125}$

جـ) $3^x = 1$

د) $10^x = \frac{1}{10000}$

هـ) $10^x = 0.000001$

و) $2^x = \frac{1}{64}$

أعداد "صغيرة جداً" في الحاسبة

1. أ) اكتب ككسر عشري:

$\frac{1}{10}$ =

$\frac{1}{100}$ =

$\frac{1}{1000}$ =

$\frac{1}{100,000}$ =

ب) أكمل:

	في العارض	كسر عشري	كسر عادي
مثال:	0.1	0.1	$\frac{1}{10}$
			$\frac{1}{100}$
			$\frac{1}{1000}$
			$\frac{1}{1000}$
			$\frac{1}{100000}$

تسجّل الحاسبة أعداداً موجبة صغيرة جداً بواسطة "الأرقام الصغيرة" عن اليمين بدلاً منها ككسر عشري. $\frac{1}{100,000}$ مسجل كـ 1.$^{-05}$

جـ) خمّن كيف تسجّل الأعداد الآتية في الحاسبة.

التمرين	في العارض
$\frac{1}{1{,}000{,}000}$	
$\frac{1}{10^{12}}$	

افحص.

2. سجّل تمريناً بحيث تحصل على النتيجة المسجلة داخل الاطار في العارض ثم اكتبه ككسر عشري أيضاً.

النتيجة	التمرين	كسر عشري
1. $^{-10}$		
1. $^{-12}$		
1. $^{-08}$		

3. نفّذ التمرين في الحاسبة، وانسخ النتيجة التي حصلت عليها:

10^{-3} =

10^{-5} =

4. أ) سجّل كيف يظهر العدد في العارض. اضغط العدد ثم اضغط =

العدد	في العارض
0.53	
0.053	
0.0053	
0.00053	

ب) اكتب عدداً بحيث تحصل على النتيجة المسجلة داخل الاطار في العارض.

النتيجة: 4.6^{-05} العدد:

النتيجة: 5.21^{-04} العدد:

5. اكتب كيف تسجل الأعداد الآتية في الحاسبة.

$0.000006 =$

$0.000072 =$

$0.0000085 =$

$0.000851 =$

$25 \cdot 10^{-5} =$

$0.02 \cdot 10^{-9} =$

6. كيف يتغير مكان الفاصلة العشرية عند الانتقال من 5.3^{-03} الى كسر عشري اعتيادي؟

7. احسب بواسطة الحاسبة وأكمل.

التمرين	في العارض	كسر عشري
$\frac{3.2}{800{,}000}$		
$\frac{1.5 \cdot 0.35}{50{,}000}$		
$\frac{20 \cdot 0.4}{640{,}000}$		
$0.025 \cdot 0.325$		
$\frac{3.2}{47{,}500}$		

تمارين

8. سجل كيف تظهر الأعداد الآتية في عارض الحاسبة.

$0.00025 =$

$0.000025 =$

$356 \cdot 10^{-7} =$

9. أكمل الجدول:

التمرين	في العارض	كسر عشري
$\frac{6.27}{1200} =$		
$\frac{5.3 \cdot 45}{30000} =$		
$2^{-6} =$		
$2^{-7} =$		
		0.000789
$12.4^{-3} =$		
		0.0001111

10. اكتب النتيجة في العارض ككسر عشري.

النتيجة: العدد: 1.37^{-04}

النتيجة: العدد: 1.78^{-08}

11. خمّن كيف تسجل الأعداد الآتية في الحاسبة. سجل ثم افحص.

0.00037 =

0.00000001 =

0.005761 =

0.0000056 =

12.اكتب > أو < أو = بحيث تنتج قضية صواب.

(i أ) $2.7 \cdot 10^{-5} \square 27 \cdot 10^{-6}$

ب) $2.7 \cdot 10^{-3} \square 2.7 \cdot 10^{-4}$

جـ) $2.7 \cdot 10^{-4} \square 27 \cdot 10^{-3}$

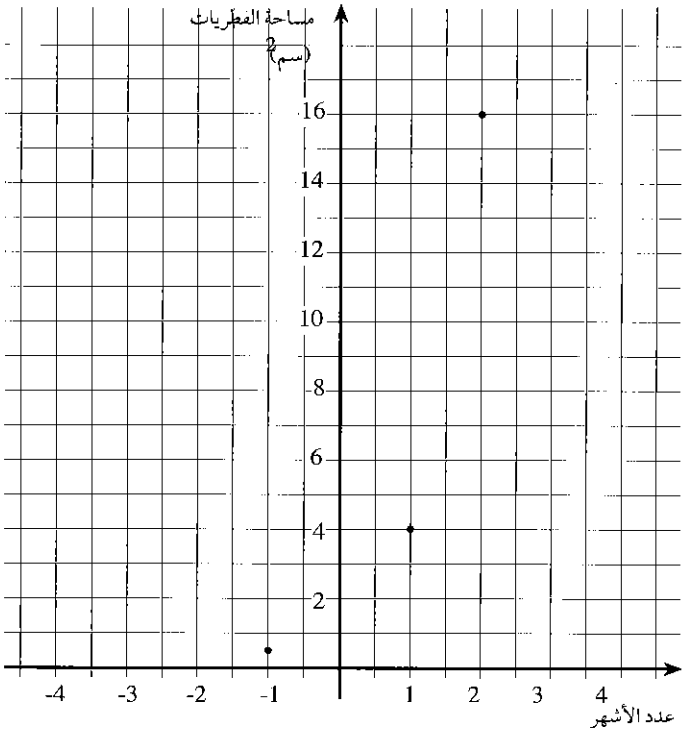
(ii أ) $2.7 \cdot 10^{5} \square 2.7 \cdot 10^{6}$

ب) $27 \cdot 10^{4} \square 2.7 \cdot 10^{5}$

جـ) $270 \cdot 10^{3} \square 0.027 \cdot 10^{6}$

القوة لأس غير صحيح

1. في هيئة المحاور أمامك، تظهر عملية ازدياد الفطريات في المختبر. في كل شهر، تزداد مساحة الفطريات 4 أضعاف من الشهر السابق.



أ) سجل قانون ازدياد الفطريات.

ب) صل النقط بخط (بدون قفزات).

جـ) خمّن معنى $4^{0.5}$ بالنسبة للمسألة واقرأ القيمة من الخط البياني.

افحص:

4	x^y	0.5	=

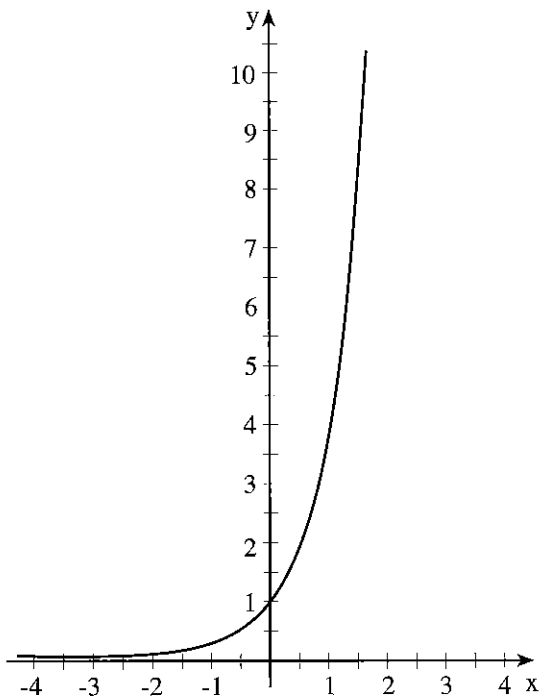
د) اقرأ القيمة $4^{1.5}$ من الخط البياني، وافحص بواسطة الحاسبة.

هـ) أكمل بمساعدة الحاسبة: $4^{2.5}$ = $4^{-1.5}$ =

بشكل مشابه، يمكن حساب قيمة 4^x لكل x.

و) احسب: $4^{1.1}$ = $4^{0.2}$ = $4^{-0.3}$ =

2. أمامك الرسم البياني للدالة $y = 4^x$



أ) – ما هي نقطة تقاطع الرسم البياني مع المحور y؟
– هل توجد للدالة نقط قصوى؟
– هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في كل المجال؟

ب) احسب بمساعدة الحاسبة

$4^{-3} =$

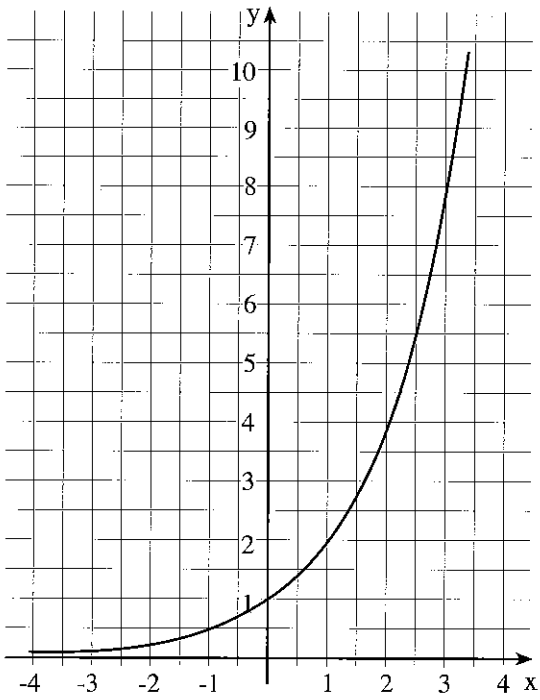
$4^{-4} =$

$4^{-4.5} =$

قيم الدالة $y = 4^x$ تأخذ بالاقتراب من المحور x كلما صغر x .

المحور x هو **خط تقارب** للدالة $y = 4^x$.

3. أمامك الرسم البياني للدالة $y = 2^x$.



أ) – ما هي نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y؟
– هل توجد للدالة نقط قصوى؟
– هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في كل المجال؟
– هل يوجد للدالة خط تقارب؟ اذا كان نعم – ما هو؟

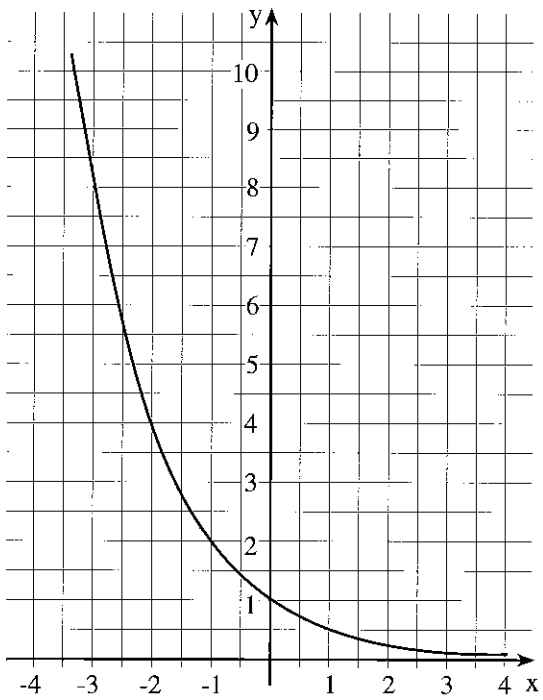
ب) حل حلاً تقريبياً بمساعدة الرسم البياني (جد قيمة x).

$2^x = 3$

$2^x = 10$

$2^x = 0.8$

4. أمامك الرسم البياني للدالة $y = 0.5^x$.



أ) – ما هي نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y؟
– هل توجد للدالة نقط قصوى؟
– هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في كل المجال؟
– هل يوجد للدالة خط تقارب؟ اذا كان نعم – ما هو؟

ب) حل حلاً تقريبياً بمساعدة الرسم البياني.

i) $0.5^x = 3$ ii) $0.5^x = 10$ iii) $0.5^x = 0.8$

جـ) قص من الورقة الشفافة في آخر الكراس، "الخط البياني الشفاف 1أ" وضعه على هيئة المحاور في هذا التمرين، بحيث يظهر الرسم البياني للدالة $y = 2^x$.
كيف يمكن الحصول على أحدهما بمساعدة الآخر؟

يتبع

د) أكمل: ____ = $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

عيّن نقطة ملائمة على الرسم البياني المناسب وأكمل $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^{\square}$

(يعني، جد لأية قيمة x, ينتج $\frac{1}{4}$ على الرسم البياني الشفاف للدالة 2^x).

أكمل:

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2^{\square}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^{\square}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{\square}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^{\square}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^{\square}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^{\square}$

5. سجل في المربع الاشارة الملائمة = أو ≠.

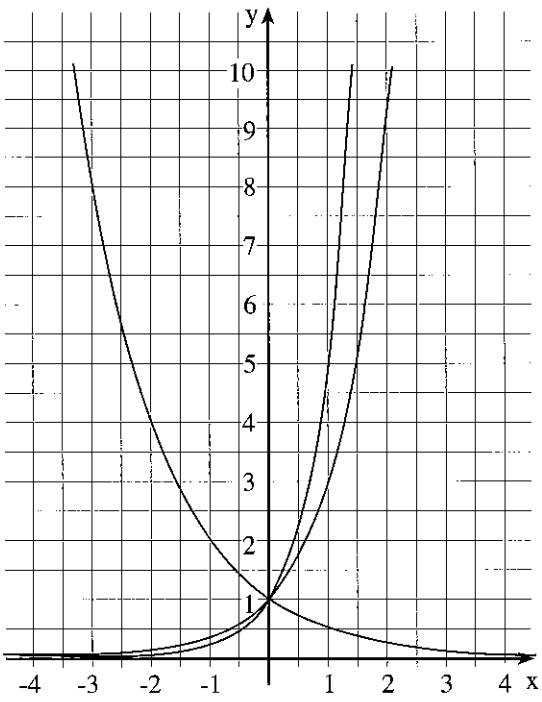
أ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \square 5^2$ $\quad$ د) $5^{-2} \square (-5)^2$

ب) $\left(\frac{1}{3}\right)^1 \square 3$ $\quad$ هـ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \square 4^2$

جـ) $7^{-2} \square \left(\frac{1}{7}\right)^2$ $\quad$ و) $5^{-3} \square \left(\frac{1}{5}\right)^3$

6. أمامك الخطوط البيانية للدوال 3^x , 5^x و 0.5^x .

أ) ناظر قانوناً لكل دالة وسجّله على الخط البياني الملائم.



ب) عوّض في كل دالة $x = 1$, احسب وافحص هل ملاءمتك صحيحة.

جـ) لأية قيمة x يتحقق: $3^x = 5^x = 0.5^x$؟

الدالة من الصورة $y = a^x$ $a > 0$ تدعى **دالة أسيّة**

تمارين

7. ارسم حسب الخواص المسجلة (ان أمكن).

أ) دالة تنازلية في كل المجال وتقطع المحور x مرتين.

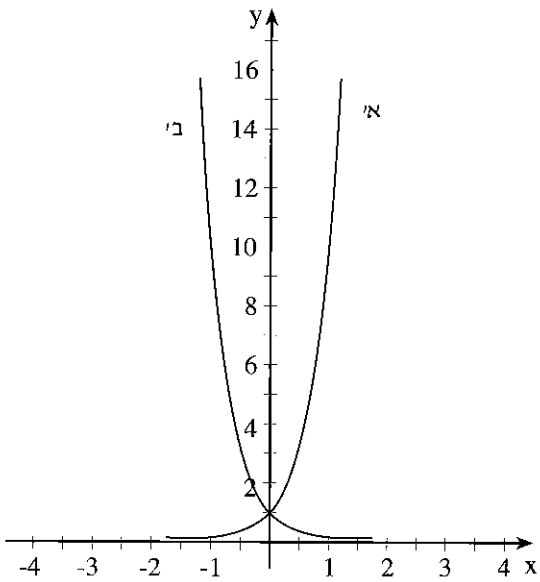
ب) دالة تنازلية في كل المجال وتقطع المحور x مرة واحدة.

ج) دالة تنازلية في كل المجال ولا تقطع المحور x .

د) دالة تصاعدية في كل المجال ولا تقطع المحور x .

8. أمامك الخطان البيانيان للدالتين 10^x وَ 0.1^x .

أ) ناظر قانوناً لكل دالة وسجّله على الخط البياني الملائم.



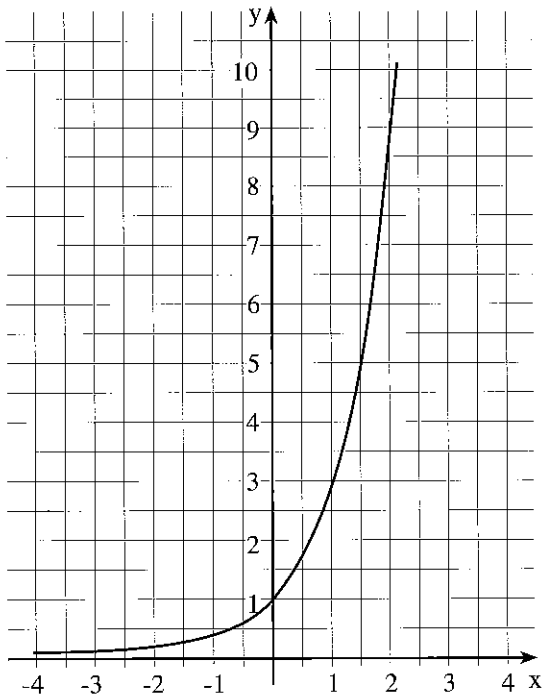
ب) ما هي نقطة تقاطع الدالتين؟

جـ) النقطة (A(1, ___ على الرسم البياني (أ) والنقطة (,B(–1 على الرسم البياني (ب). أكمل الاحداثي الثاني للنقطتين حسب القانون الملائم ثم عيّن النقطتين على الرسمين البيانيين.

د) كيف تحصل على الرسم البياني للدالة 0.1^x من الرسم البياني للدالة 10^x؟

9. أمامك الرسم البياني للدالة $y = 3^x$.

أ) ضع الرسم البياني الشفاف 1أ على نفس هيئة المحاور بحيث يظهر الرسم البياني للدالة $y = 2^x$.



- سجل ثلاث قيم لِ x تحقق $3^x > 2^x$.

- سجل (يمكن بالكلمات) لأية قيم x يتحقق $3^x > 2^x$.

ب) ضع على نفس هيئة المحاور، الرسم البياني الشفاف 2أ (الملائم للدالة 3^x) بحيث تظهر الدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

استعن بالخطين البيانيين وجد قيمة x بالتقريب.

(i $3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(ii $3^{-0.5} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(iii $3^{0.5} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(iv $3^{1.5} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

10. أ) أمامك الرسم البياني للدالة $y = 3^x$.

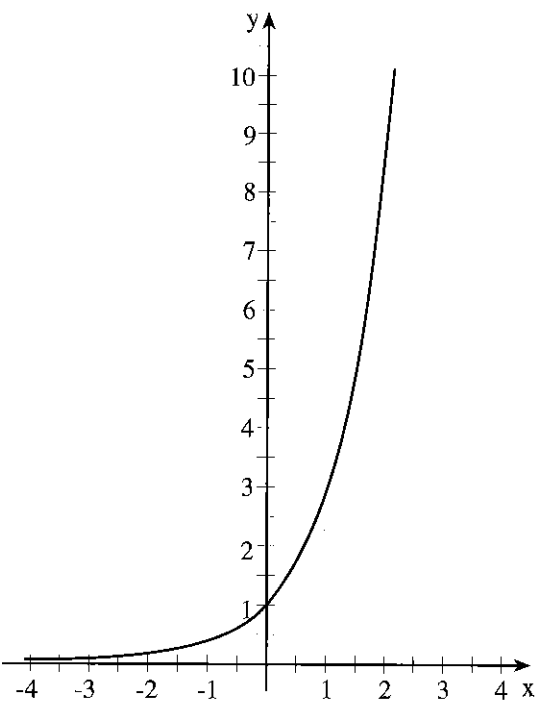
ارسم بالتقريب وبألوان مختلفة، الرسوم البيانية للدوال الآتية: (جميعها في نفس هيئة المحاور).

$y = 2^x$

$y = 4^x$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$y = 0.5^x$



11. حل المعادلات:

أ) $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

ب) $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

جـ) $5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

د) $10^x = \left(\frac{1}{10}\right)^{0.5}$

هـ) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^0$

و) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 = 5^x$

ز) $0.5^x = 2^{-2}$

ح) $(0.1)^x = 10^{-2}$

ما معنى "القوة" نصف؟

1. احسب بمساعدة الحاسبة: $4^{0.5}$ =

$9^{0.5}$ =

$25^{0.5}$ =

حاول الاكمال بدون حاسبة: $36^{0.5}$ =

$100^{0.5}$ =

افحص.

2. أ) هل يمكنك ان تجد $289^{0.5}$ باستعمال زر يختلف عن x^y ؟ افحص بمساعدة x^y .

ب) اكتب باستعمال عملية أخرى.

$256^{0.5}$ =

$10000^{0.5}$ =

3. احسب.

أ) $64^{0.5}$ =

ب) $0.25^{\frac{1}{2}}$ =

جـ) $1000^{\frac{1}{2}}$ =

د) $8.2^{0.5}$ =

4. صل بخط كل تمرينين لهما نفس النتيجة.

$3^{\frac{1}{2}}$	•	•	$9^{0.5}$
9	•	•	$\sqrt{27}$
$27^{0.5}$	•	•	$\sqrt{3}$
3^1	•	•	$\sqrt{81}$

5. اكتب التمارين الآتية بواسطة القوة.

أ) $\sqrt{1000} =$ ب) $\sqrt{256} =$

جـ) $\sqrt{121} =$ د) $\sqrt{x} =$

وبشكل عام: $\sqrt{a} = a^{0.5}$

لقد عرفت عملية الجذر عند تعاملك مع الدوال التربيعية، وحسبت الجذور في حل المعادلات التربيعية.
كذلك رأيت ان دالة الجذر $\sqrt{x}$ هي دالة عكسية للدالة x^2.
والآن، عدنا الى عملية الجذر ورأينا انه يمكن التعبير عنها كقوة.

تُستعمل اشارة الجذر أيضاً كقوس. يعني، قبل الجذر ننفّذ العملية المسجلة تحته، ان وجدت عملية كهذه.

6. احسب:

أ) $\sqrt{16+9} =$

ب) $\sqrt{100-64} =$

جـ) $\sqrt{\frac{100}{4}} =$

7. وماذا بالنسبة لقوانين القوى ذات الأس $\frac{1}{2}$ ؟
حل وافحص تساوي النتيجتين في كل زوج.

أ) $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} =$ $9^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} =$

ب) $64^{1} \cdot 64^{0.5} =$ $64^{1.5} =$

جـ) $\frac{25^{1}}{25^{\frac{1}{2}}} =$ $25^{\frac{1}{2}} =$

وماذا بالنسبة للأس $-\frac{1}{2}$ ؟

8. بسّط وحل.

مثال: $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

أ) $64^{-\frac{1}{2}} =$

ب) $\frac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{1}} =$

جـ) $36^{-\frac{1}{2}} =$

د) $\frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} =$

في التمرينين 7 و 8 رأيت ان قوانين القوى $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ، $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ لأسس صحيحة، تتحقق أيضاً للأسس $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $1\frac{1}{2}$ وهكذا.

9. حل.

أ) $4^x = 2$ ب) $3^x = \sqrt{3}$ ج) $100^x = \frac{1}{10}$ د) $7^x = \sqrt{7}$

تمارين

10. اكتب التمارين بواسطة الاشارة $\sqrt{\ }$ واحسب.

أ) $64^{0.5} =$ ب) $169^{0.5} =$ ج) $(12^{0.5})^2 =$

د) $6.25^{\frac{1}{2}} =$ هـ) $(13^2)^{0.5} =$ و) $144^{0.5} =$

11. سجّل في المربع = أو ≠ بحيث ينتج ادّعاء صحيح.

أ) $(\sqrt{5})^2 \square 5$

ب) $\sqrt{5^2} \square 5$

جـ) $\sqrt{9 \cdot 25} \square 3 \cdot 5$

د) $\sqrt{9 + 25} \square 3 + 5$

هـ) $\sqrt{9} + \sqrt{25} \square 3 + 5$

و) $\sqrt{25 - 9} \square 5 - 3$

ز) $\sqrt{\frac{25}{9}} \square \frac{5}{3}$

ح) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} \square \frac{5}{3}$

ط) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$

12. خمّن وافحص بمساعدة الحاسبة.

أ) $\square^{1/2} = 4$

ب) $\sqrt{\square} = 3$

جـ) $\sqrt{\square} = 16$

د) $\square^2 = 16$

هـ) $81^{\square} = 9$

و) $\sqrt{\sqrt{\square}} = 3$

13. اكتب كقوة للعدد 2 أو للعدد 3 .

أ) $\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^2}{2^3} =$

ب) $\frac{3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3} =$

جـ) $\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} =$

د) $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{1}{2}}} =$

هـ) $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^1} =$

و) $\frac{3^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^2} =$

14. حل المعادلات.

أ) $8^x = \sqrt{8}$

ب) $10^x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

جـ) $81^x = 9$

د) $8^x = \frac{1}{\sqrt{8}}$

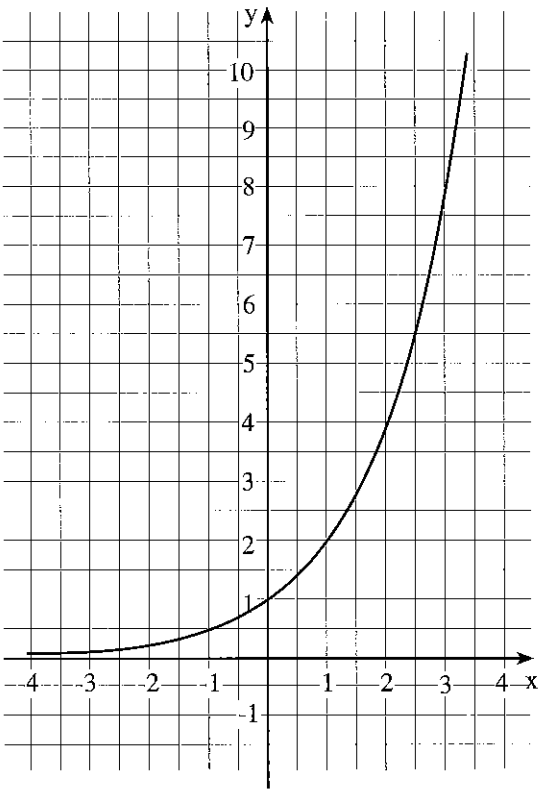
هـ) $5^x = \sqrt{5}$

و) $9^x = \frac{1}{\sqrt{9}}$

ازاحات وانعكاسات

1. أمامك الرسم البياني للدالة $y = 2^x$.

ضع الرسم البياني الشفاف 1أ (بدون المحور x) على الرسم البياني المرسوم.



أ) أزح الرسم البياني الشفاف 3 وحدات الى أعلى ، (على طول المحور y). ثم اكتب قاعدة التناظر للدالة المزاحة.

ب) أكمل حسب القانون الذي كتبته،الاحداثي y للنقطة (☐ , 1) ثم افحص هل تقع النقطة على الرسم البياني للدالة المزاحة.

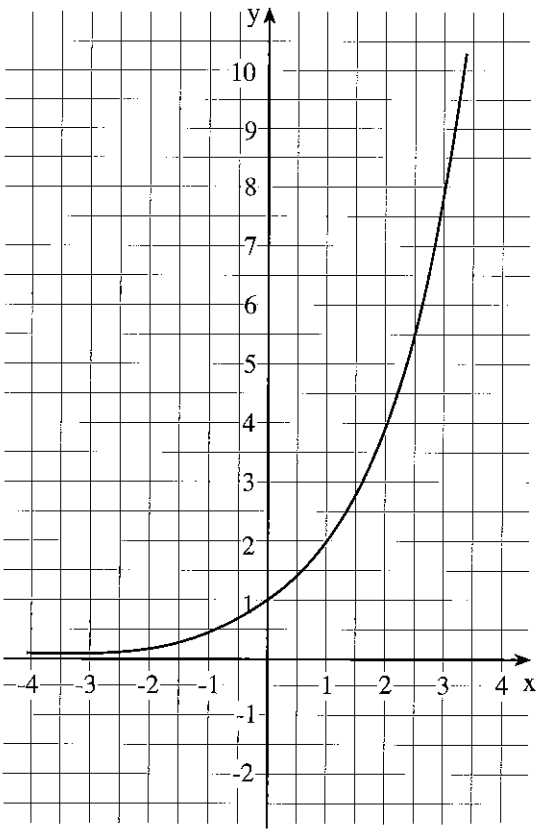
جـ) أكمل حسب القانون الذي كتبته،الاحداثي y للنقطة (☐ , 0) ثم افحص هل تقع النقطة على الرسم البياني للدالة المزاحة.

د) ما هو خط التقارب للدالة المزاحة؟

هـ) هل للدالة المزاحة توجد نقطة قصوى؟

2. ضع الرسم البياني الشفاف آب على الرسم البياني للدالة $y = 2^x$ المرسومة. أزح الرسم البياني الشفاف بحيث تحصل على الدالة المسجلة، ثم أكمل الجدول.

الدالة	نقطة التقاطع مع المحور x	نقطة التقاطع مع المحور y	خط التقارب
أ) $y = 2^x + 1$			
ب) $y = 2^x + 3.5$			
جـ) $y = 2^x - 1.5$			



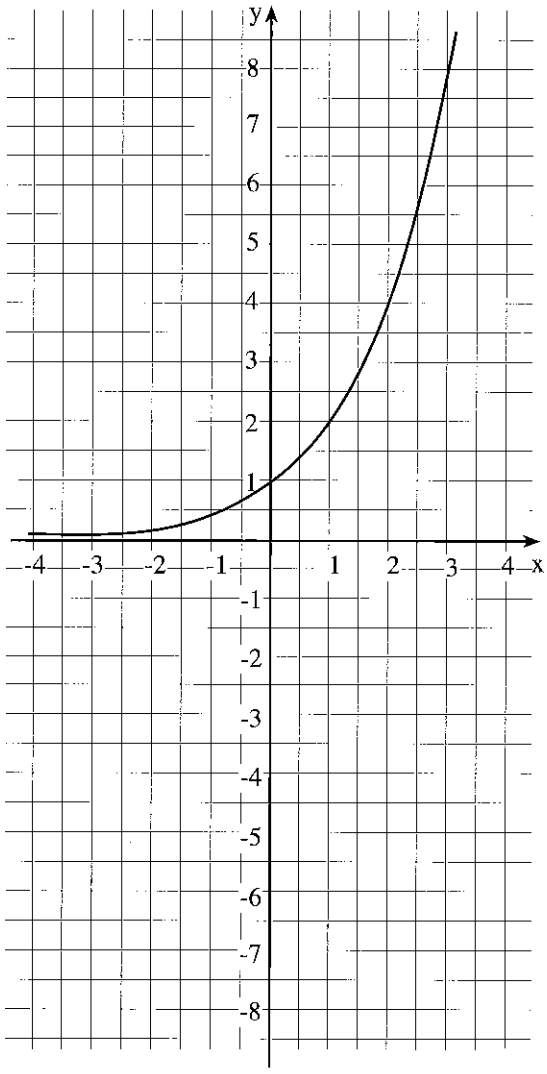
3. النقطة (0, 1) تقع على الرسم البياني للدالة $y = 2^x$.

أ) الى أين تتحرك هذه النقطة بعد ازاحة الرسم البيناني للدالة 4 وحدات الى أعلى، على طول المحور y؟

ب) الى أين تتحرك النقطة (0, 1) بعد ازاحة الرسم البياني للدالة 3 وحدات الى أسفل، على طول المحور y؟

ما هي قاعدة تناظر الدالة المزاحة؟

4. أمامك الرسم البياني للدالة $y = 2^x$.



ضع الرسم البياني الشفاف 1أ على الرسم البياني المرسوم، ثم جد انعكاسه عن المحور x (**المحور x هو خط المرآة**).

أ) اكتب قاعدة تناظر دالة الانعكاس.

ب) عوّض $x = 1$ في القانون الذي وجدته وافحص هل النقطة (□ , 1) تقع على دالة الانعكاس.

جـ) ما هي نقطة تقاطع دالة الانعكاس مع المحور y؟ عوّض في القانون الذي كتبته وافحص.

د) هل الدالة الناتجة تصاعدية أم تنازلية في كل المجال؟

5. أ) احسب $\left(\frac{1}{2}\right)^1 =$ $2^{-1} =$

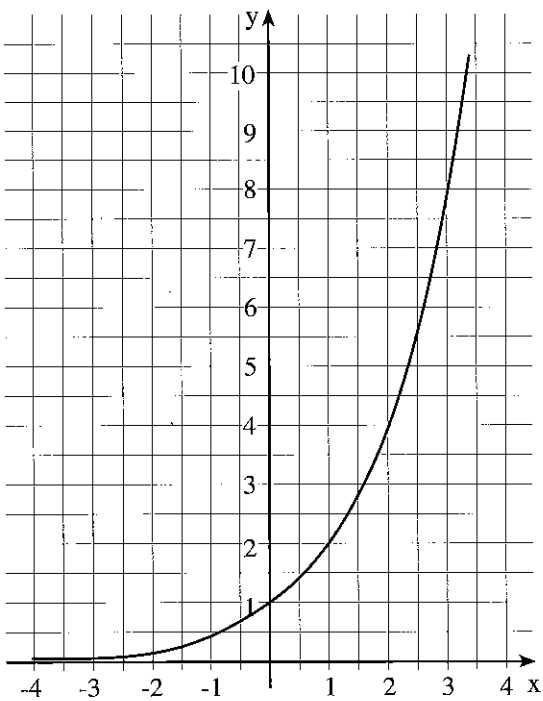
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ $2^{-2} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ $2^{-3} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ $2^{-4} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$ $2^{-5} =$

ب) وبشكل عام أكمل: $2^{-x} =$



ج) للحصول على الرسم البياني $y = 2^{-x}$, ضع الرسم البياني الشفاف 1أ على الرسم البياني للدالة 2^x ثم جد انعكاسه عن **المحور y** .

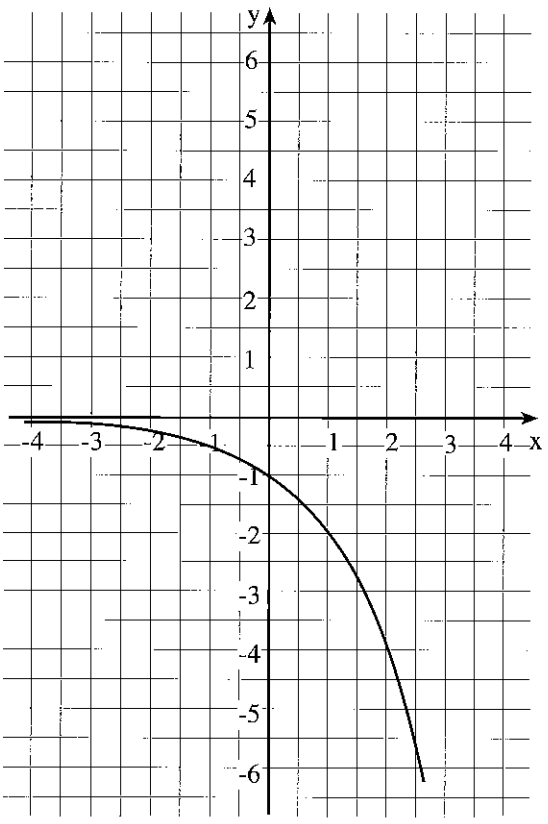
د) في البند "القوة لأس غير صحيح" مرسوم الرسم البياني للدالة $y = 0.5^x$ قارن مع الرسم البياني لدالة الانعكاس الناتج.

في البند "وماذا قبل الحد الأول" رأيت $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

هنا رأيت أن $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ فينتج أن $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

تمارين

6. أمامك الرسم البياني للدالة $y = -2^x$.



ضع الرسم البياني الشفاف 1ب بحيث ينطبق على الرسم البياني للدالة $y = -2^x$.

أ) أزح الرسم البياني الشفاف وحدتين الى أعلى، على طول المحور y.
اكتب قاعدة تناظر الدالة المزاحة.

ب) احسب $x = 1$ في القانون الذي كتبته وأكمل (□ , 1) .
افحص، هل النقطة الناتجة تقع على الرسم البياني للدالة.

جـ) عوّض في القانون الذي كتبته $x = 2$ وأكمل (□ , 2).
افحص، هل النقطة الناتجة تقع على الرسم البياني للدالة.

7. عوّض في كل دالة $x = 2$ واحسب:

أ) $y = 2^x - 0.5$

ب) $y = 0.5^x + 2$

جـ) $y = x^3 + 2.5$

د) $y = x^{0.5} + 2x$

هـ) $y = -2^x + 3$

و) $y = 3 \cdot 2^x$

8. اكتب بالكلمات كيف ينتج الرسم البياني لكل دالة، من الرسم البياني للدالة $y = 5^x$.

مثال:

$y = 5^x + 1$: ازاحة الرسم البياني للدالة وحدة واحدة الى أعلى.

أ) $y = 5^x - 10$

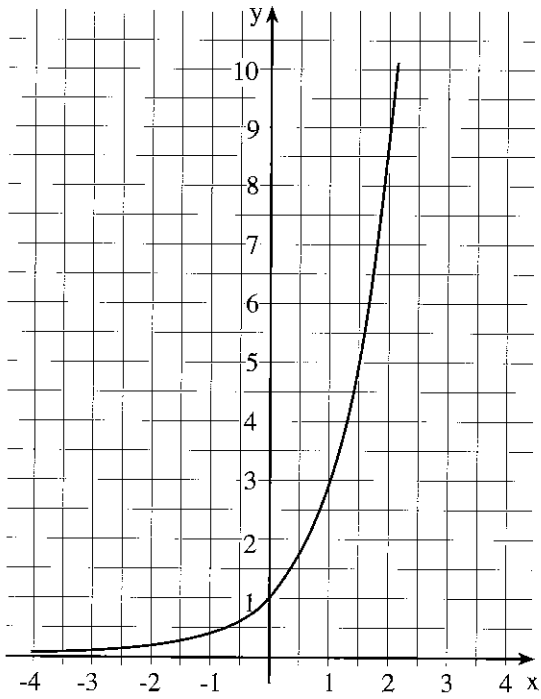
ب) $y = -5^x$

جـ) $y = -5^x + 2$

د) $y = 5^x$

هـ) $y = 5^{-x} + 1$

9. أمامك الرسم البياني للدالة $y = 3^x$.



ضع الرسم البياني الشفاف 2(ب) الملائم للدالة $y = 3^x$ على الرسم البياني المرسوم.

أ) سجّل نقطة تقاطع هذه الدالة مع المحور y.

ب) أزح الرسم البياني الشفاف الى أعلى بحيث يمر في النقطة (1,5) . اكتب قاعدة تناظر الدالة الناتجة.

10. أكمل واحسب.

مثال: $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

$10^{-2} = 0.1^{\square} =$

$10^{\square} = 0.1^3 =$

$10^{\square} = 0.1^4 =$

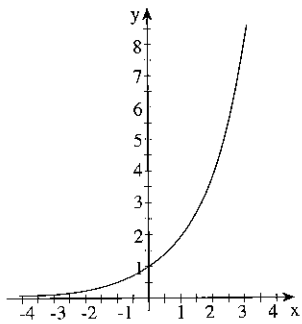
$10^{-7} = 0.1^{\square} =$

وبشكل عام أكمل: $10^{-x} =$

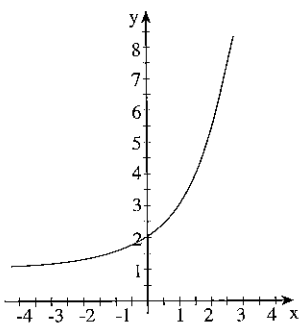
11. ناظر لكل دالة رسمها البياني.

أ) $y = 2^x + 1$ ب) $y = 0.5^x - 1$ جـ) $y = 2^x - 2$ د) $y = 3^x$ هـ) $y = 2^x$

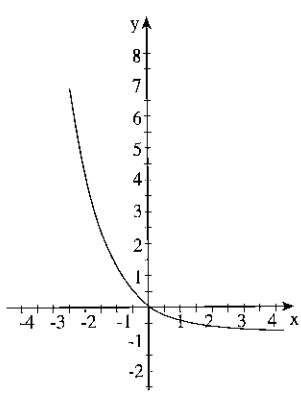
(i



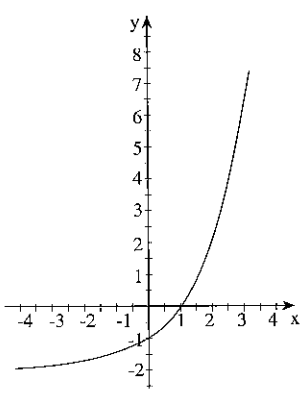
(ii



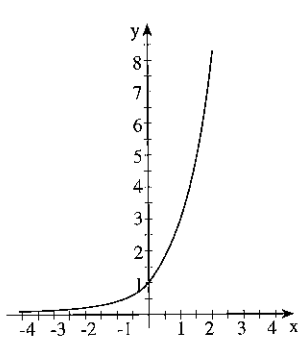
(iii



(iv



(v

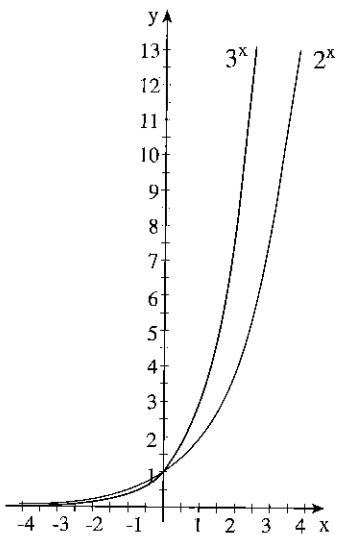


عوّض في كل دالة $x = 1$ وافحص، هل النقطة التي حسبت احداثياتها تقع على الرسم البياني الملائم.

واحدة من العائلة

1. أمامك دالتان أسّيتان $y = a^x$ بحيث $a > 1$.

أ) سجل خواصهما.

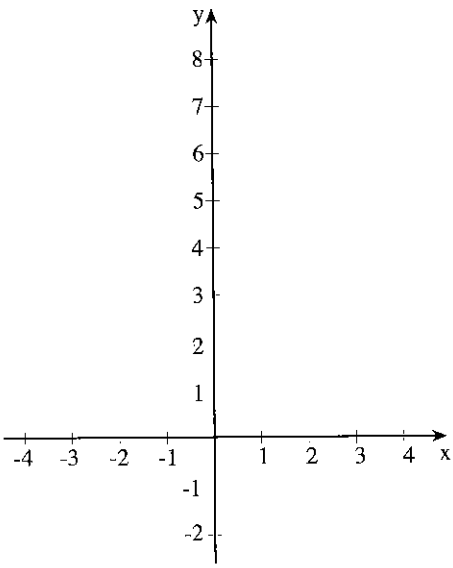


ب) سجل دالتين اخريين تنتميان لهذه العائلة ($y = a^x$ $a > 0$).

جـ) ماذا يمكنك ان تقول عن **اشارة ميل** الرسم البياني للدالة في نقط مختلفة؟

د) ماذا يمكنك ان تقول عن ميل الرسم البياني للدالة عندما تكبر قيمة x

2. مشتقة الدالة تبيّن ميل الدالة الأصلية في كل نقطة.
حسب النتيجة التي سجلتها من التمرين السابق، الميول موجبة لكل x وهي تكبر عندما تكبر قيمة x لذلك فان مشتقة الدالة **موجبة وتصاعدية** لكل x.



- ارسم خطاً بيانياً لدالة كهذه، هي موجبة لكل x وتصاعدية لكل x .

بالتأكيد، لقد رسمت دالة مشابهة للدالة الأسّية نفسها. وبالفعل فان مشتقة الدالة مشابهة للدالة نفسها. توجد دالة أسّية مساوية تماماً لمشتقتها، وهي دالة مهمة جداً في الرياضيات والفيزياء، يمكنك ايجادها بواسطة الحاسبة. رمزها e^x بحيث e عدد (بين 2 و 3).

3. أ) لمعرفة العدد e اضغط:

1	e^x

(في معظم الحاسبات يجب ضغط INV لحساب قيمة e^x.)

ب) أكمل الأرقام $e = e^1 = 2.7$ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

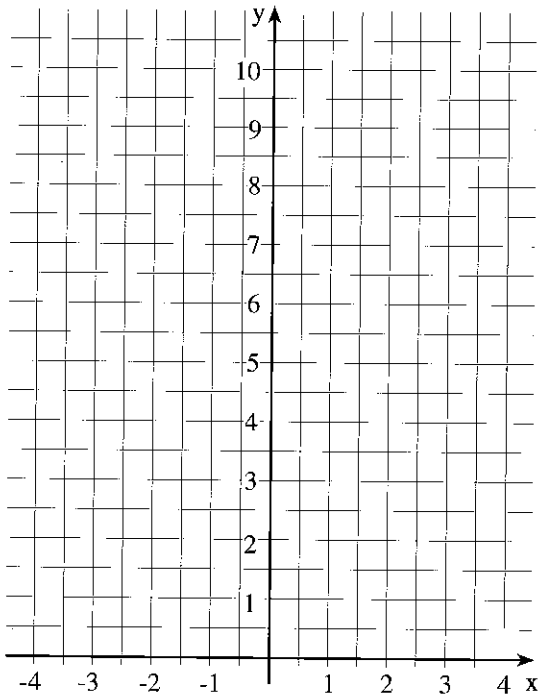
جـ) احسب e^3:

3	e^x

د) احسب $e^{0.5}$.

4. أكمل جدول قيم الدالة $y = e^x$، عيّن النقط وارسم الرسم البياني للدالة.

x	−2	−1	−0.5	0	1	1.5	2	2.5
$y = e^x$								



كما ذُكر سابقاً، فان مشتقة الدالة $y = e^x$ مساوية للدالة نفسها.
يعني، مشتقة الدالة $y = e^x$ هي: $y' = e^x$

5. جد مشتقة كل واحدة من الدوال الآتية:

أ) $y = 3 \cdot e^x$

ب) $y = e^x + 3$

جـ) $y = e^x + x$

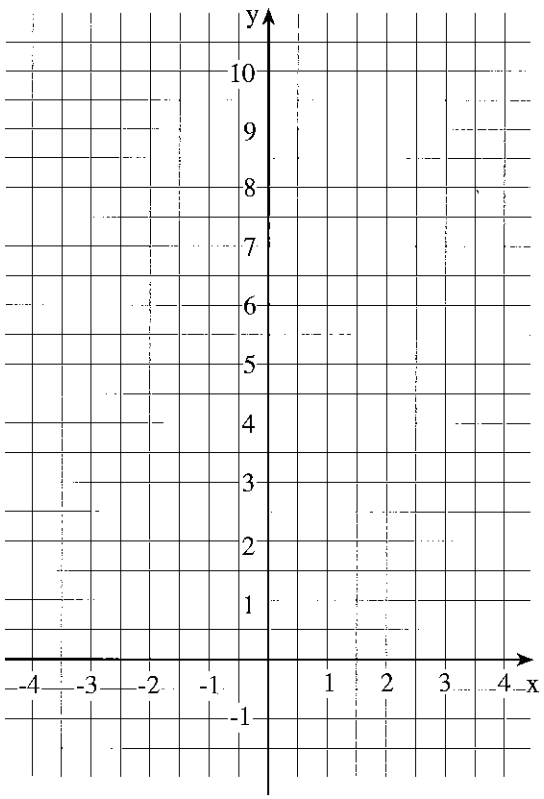
د) $y = e^x + x^2$

هـ) $y = 2e^x - 3x$

ح) $y = 2x^2 - e^x$

6. ابحث الدالة $y = e^x - x + 2$ حسب الخطوات الآتية:

أ) جد نقطة تقاطع الدالة مع المحور y , وعيّنها في هيئة المحاور.



ب) اشتق الدالة وجد نقطة مشبوهة ثم عيّنها في هيئة المحاور.

جـ) احسب احداثيات نقطتين عن جانبي النقطة المشبوهة وعيّنها في هيئة المحاور. بيّن نوع النقطة القصوى ثم أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

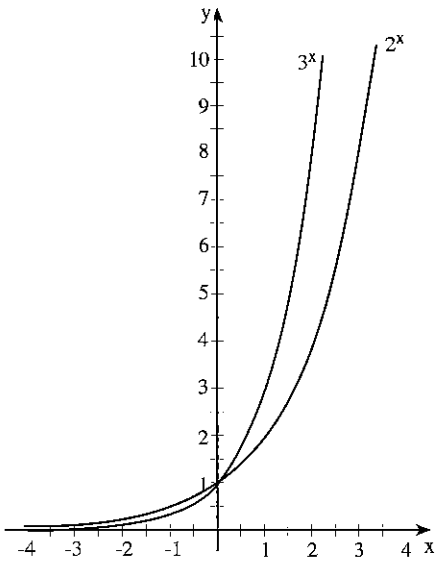
لحساب $e^{-1} + 3$ اضغط:

1	+/–	e^x	+	3	=

د) ما هي مجالات تصاعد وتنازل الدالة؟

تمارين

7. أمامك الرسمان البيانيان للدالتين
$y = 2^x$ و $y = 3^x$.
ارسم رسماً تقريبياً، الرسم البياني للدالة $y = e^x$ في نفس هيئة المحاور.



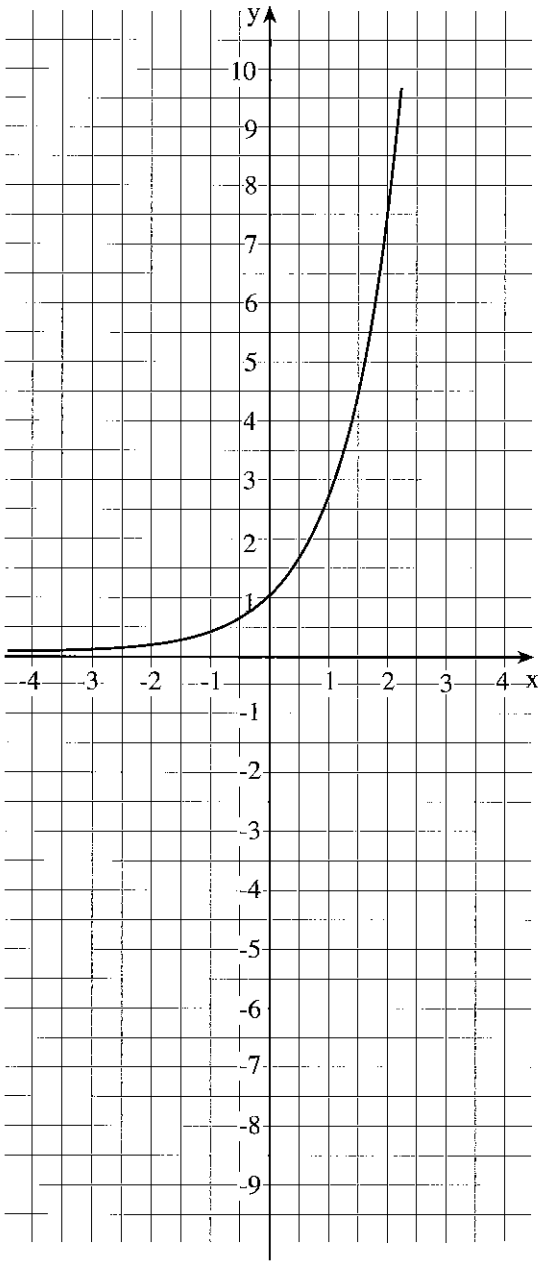
8. أ) احسب.

$e^{0.5} =$ $e^{-1} =$ $e^5 =$ $e^4 =$

ب) صل بين الأعداد المتساوية.

e^0	•	•	e
e^{-1}	•	•	$\frac{1}{e^2}$
e^{-2}	•	•	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$e^{0.5}$	•	•	$\frac{1}{e}$
$e^{-0.5}$	•	•	$\sqrt{e}$
e^1	•	•	1

9. أمامك الرسم البياني للدالة e^x .



لتنفيذ التعليمات، استعن بالرسم البياني الشفاف 3 في نهاية الكراس (الملائم لِ e^x).

- سجّل في كل حالة، قاعدة تناظر الدالة الناتجة.

- عوّض $x = 1$ وافحص هل تقع النقطة على الرسم البياني للدالة.

أ) أزح وحدتين الى أعلى.

ب)أزح 3 وحدات الى أسفل.

جـ)انعكاس عن المحور x.

د) انعكاس عن المحور y

10. حل بالتقريب (إن يوجد حل) حسب الرسم البياني للدالة. عوّض وافحص.

أ) $e^x = 12$

ب) $e^x = 4$

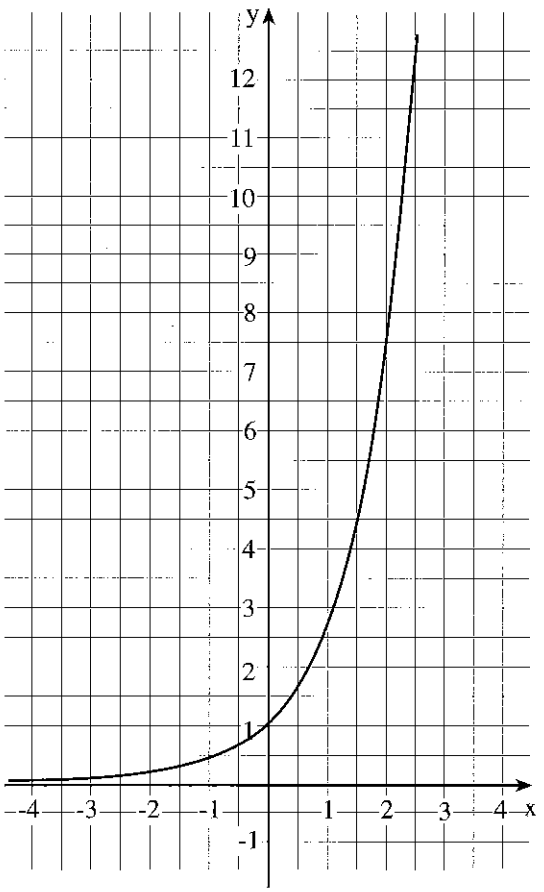
جـ) $e^x = 2$

د) $e^x = 1$

هـ) $e^x = \frac{1}{2}$

و) $e^x = 0$

ز) $e^x = -1$



11. أ) – ما هو حل المعادلة $e^x = e$؟

– بين أي عددين صحيحين يقع حل المعادلة $e^x = 2$؟
افحص بمساعدة الحاسبة.

ب) – ما هو حل المعادلة $e^x = \frac{1}{e}$؟

– بين أي عددين صحيحين يقع حل المعادلة $e^x = \frac{1}{4}$؟
افحص بمساعدة الحاسبة.

12. جد مشتقة كل دالة:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

أ) $y = x^2 - e^x$ $\quad$ و) $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{x}$

ب) $y = 2e^x + x - 1$ $\quad$ ز) $y = 3e^x + \frac{2}{x}$

جـ) $y = e^x + 2\sqrt{x}$ $\quad$ ح) $y = \frac{4}{x} - e^x + x$

د) $y = 3(e^x + x^2)$ $\quad$ ط) $y = 2(e^x - 3\sqrt{x})$

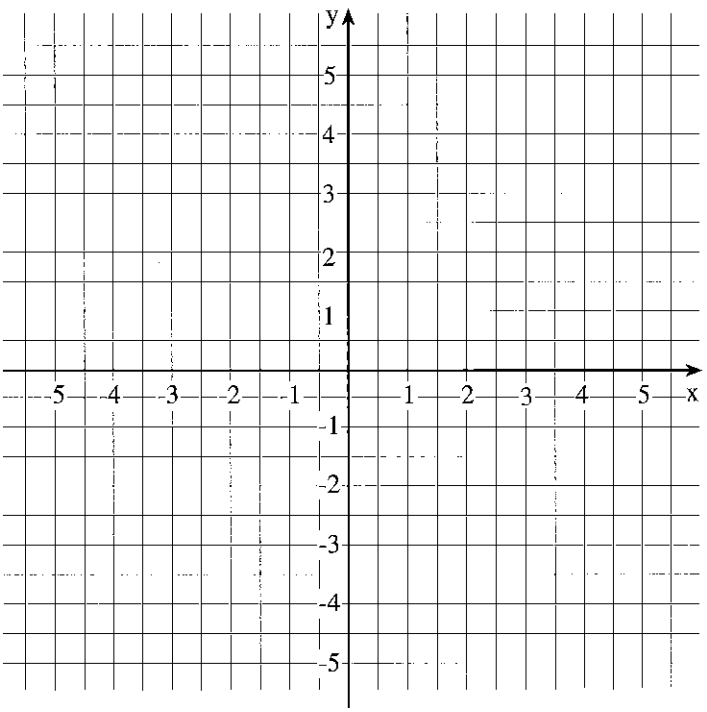
هـ) $y = e^x + 3$ $\quad$ ي) $y = e^x + x(x-2)$

13. ابحث الدالة $f(x) = e \cdot x - e^x$ استعن بالخطوات الآتية:

أ) جد نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y. وعيّنها في هيئة المحاور.

ب) اشتق الدالة وجد نقطة مشبوهة ثم عيّنها في هيئة المحاور.

جـ) احسب احداثيات نقطتين اخريين بحيث تتمكّن من تمييز نوع النقطة المشبوهة، وعيّنها في هيئة المحاور.



د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

هـ) - عوّض وافحص: $f(-1) =$

افحص هل النقطة التي وجدتها تقع بالتقريب، على الرسم البياني للدالة.

و) سجل مجالات تصاعد وتنازل الدالة..

14. معطاة الدالة $y = e^x + x$

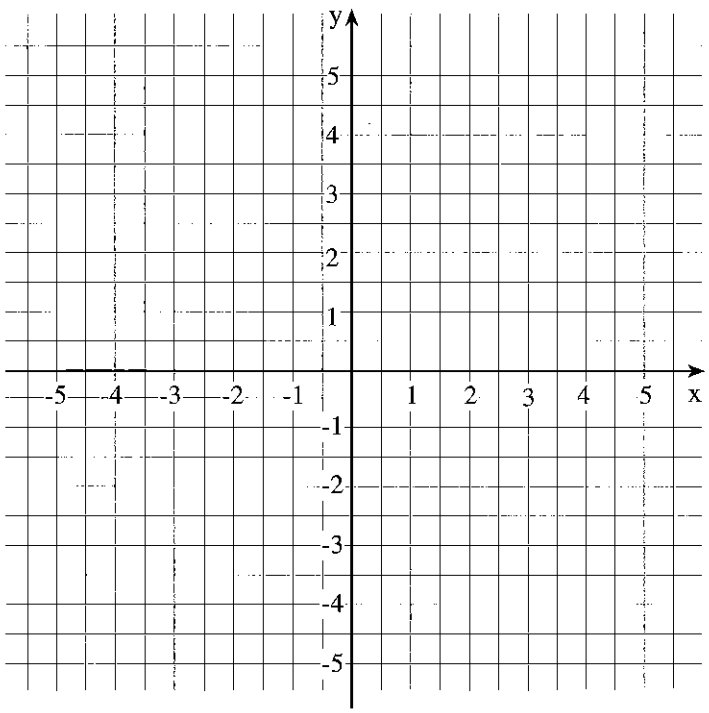
أ) جد نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y، وعيّنها في هيئة المحاور.

ب) جد مشتقة الدالة وفسّر لماذا لا يوجد للدالة نقط قصوى.

جـ) أكمل احداثيات النقط وعيّنها في هيئة المحاور.

(–2,) (–1,) (2,) (1,)

د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

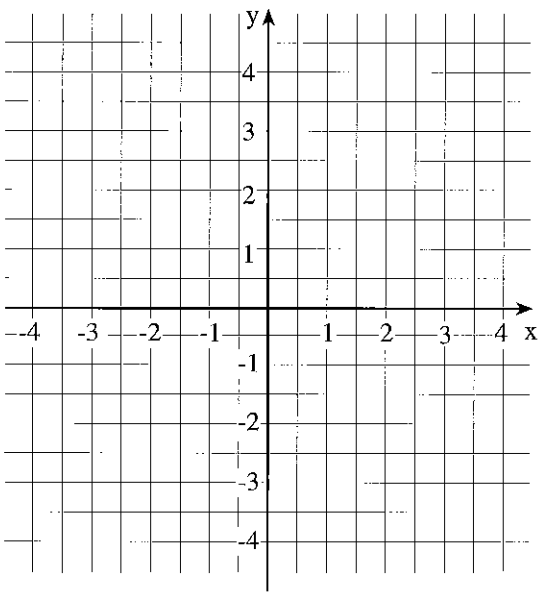


هـ) سجل بالتقريب، احداثيات نقط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور x.

و) سجل مجالات تصاعد وتنازل الدالة.

15. معطاة الدالة $y = 2e^x - x$

أ) جد نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y، وعيّنها في هيئة المحاور.



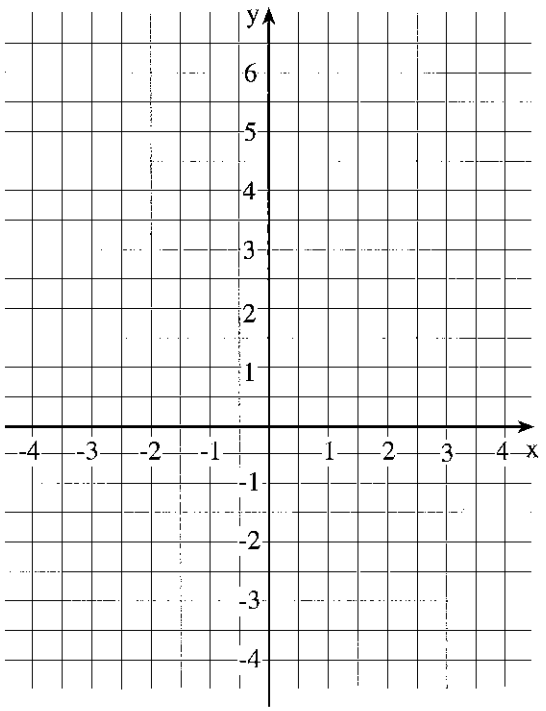
ب) النقطة القصوى الوحيدة هي (____ ,0.69–) . أكمل الاحداثي y، وعيّن النقطة في هيئة المحاور.

جـ) احسب نقطاً أخرى بحيث تتمكن من تمييز نوع النقطة القصوى، وعيّن النقط في هيئة المحاور.

د) أكمل رسماً بيانياً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

16. ابحث الدالة $y = e^x - 2x$. استعن بالخطوات الآتية.

أ) جد نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y وعيّنها في هيئة المحاور.



ب) اكتب مشتقة الدالة.

جـ) جد بالتقريب، احداثيات نقطة مشبوهة وعيّنها في هيئة المحاور.

د) احسب وأكمل احداثيات النقط، وعيّنها في هيئة المحاور.

(–1,) (–0.5,) (0.5,) (1,) (2,)

ما نوع النقطة المشبوهة؟

هـ) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

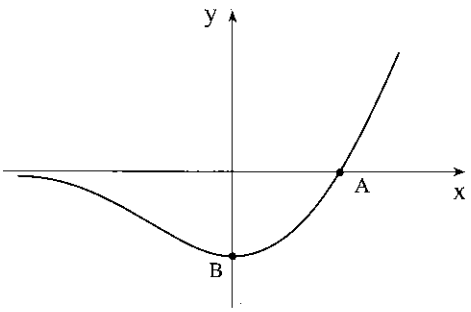
هل توجد للدالة نقط تقاطع مع المحور x؟

و) هل يوجد للدالة $y = e^x - 2x - 1$ نقط تقاطع مع المحور x؟ علّل!

ز) ما هي احداثيات النقطة القصوى للدالة $y = -e^x + 2x$ ؟ وما نوعها؟

عن بحث الدالة الأسيّة وعن المماس أيضاً

1. أمامك الرسم البياني للدالة $y = (x - 1)\,e^x$



أ) سجل احداثيات النقطتين A وَ B .

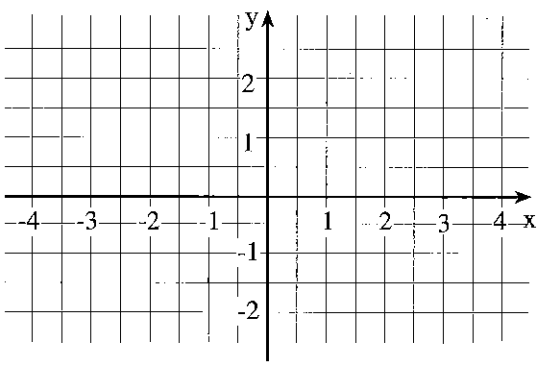
ب) سجل مجالات تصاعد وتنازل الدالة.

جـ) لأية قيم x الدالة موجبة؟
لأية قيم x الدالة سالبة؟

د) هل يوجد للرسم البياني للدالة خط تقارب؟ علّل!

2. ابحث الدالة $y = x \cdot e^x$ حسب الخطوات الآتية.

أ) أكمل احداثيات النقط بحيث تقع على الرسم البياني للدالة، وعيّنها في هيئة المحاور. (1,) (0.5,) (–2,)



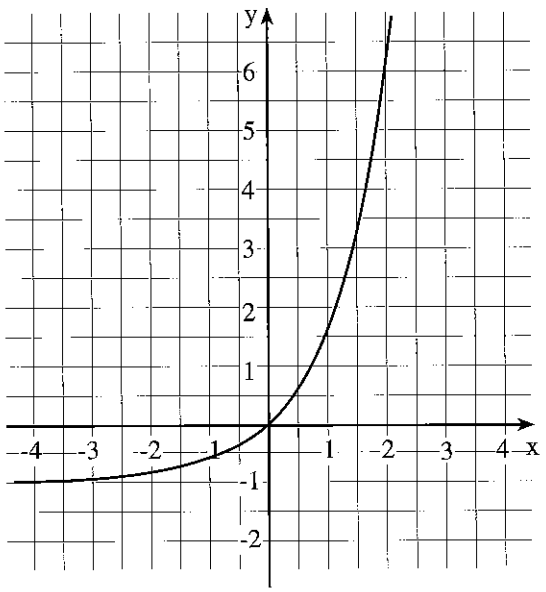
ب) جد وعيّن نقطة التقاطع مع المحور y .

جـ) مشتقة الدالة هي $y' = e^x \cdot (1 + x)$
جد نقطة مشبوهة وعيّنها في هيئة المحاور.

د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

هـ) ارسم في نفس هيئة المحاور، الرسم البياني للدالة $y = -x \cdot e^x$.

3. في الشكل أمامك، رسم تقريبي للرسم البياني للدالة $y = e^x - 1$.

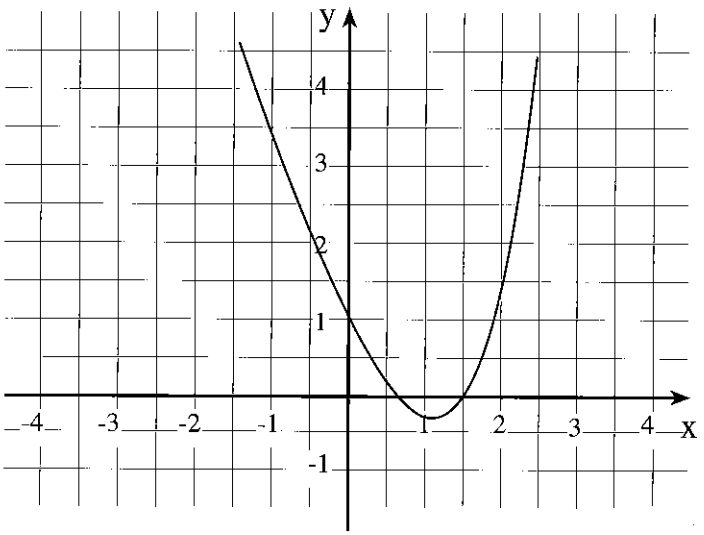


أ) عيّن على الرسم البياني للدالة نقطة، الاحداثي x لها 1 .

ب) ارسم مماساً للرسم البياني للدالة في النقطة التي عيّنتها، واقرأ معادلته بالتقريب.

جـ) اشتق وجد ميل المماس في النقطة المذكورة.
قارن مع قيمة الميل الذي سجلته في المعادلة من البند (ب).

4. في الشكل أمامك، رسم تقريبي للرسم البياني للدالة $y = e^x - 3x$



أ) جد نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y .

ب) ارسم مماساً للرسم البياني للدالة في النقطة المذكورة.

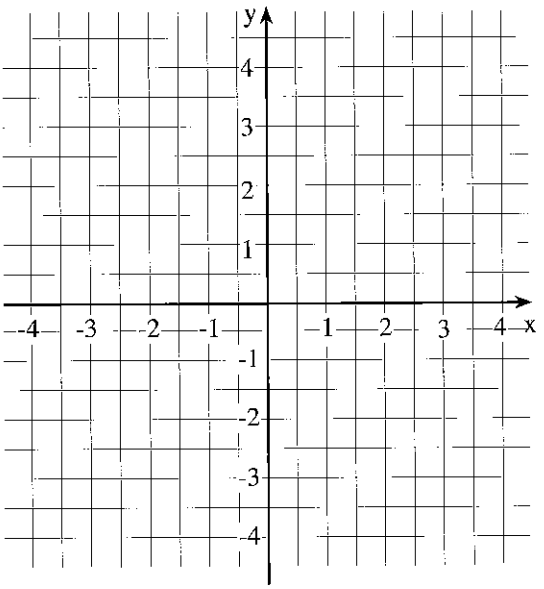
جـ) ما هي معادلة المماس؟

د) اشتق وجد ميل المماس، ثم قارنه مع ميل المماس الذي رسمته في البند (ب).

تمارين

5. معطاة الدالة $y = (2 - x) \cdot e^x$

أ) جد احداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y. عيّنها في هيئة المحاور.



ب) جد احداثيات نقطة التقاطع مع المحور x, وعيّنها في هيئة المحاور.

جـ) مشتقة الدالة هي: $y' = e^x(1 - x)$. جد نقطة مشبوهة وعيّنها في هيئة المحاور.

د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

هـ) هل الرسم البياني يقطع المحور x في الجهة السالبة منه؟ علّل!

و) أكمل احداثيات النقط الواقعة على الرسم البياني للدالة:

(–8,) (–4,) (–2,)

افحص اجابتك عن البند (هـ).

ز) هل يوجد للرسم البياني للدالة خط تقارب؟ علّل!

6. ابحث الدالة $y = x^2 \cdot e^x$ حسب الخطوات الآتية:

أ) جد نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور x. كم نقطة كهذه يوجد؟

ب) مشتقة الدالة هي $y' = e^x \cdot (x^2 + 2x)$.
جد نقطاً "مشبوهة" وعيّنها في هيئة المحاور.

جـ) لتمييز نوع النقط المشبوهة، جد احداثيات نقط اخرى وعيّنها في هيئة المحاور.

د) سجّل مجالات التصاعد والتنازل.

هـ) هل يوجد للرسم البياني للدالة خط تقارب؟ علّل!

و) ارسم في نفس هيئة المحاور، الرسم البياني للدالة $y = -x^2 \cdot e^x$.

7. معطاة الدالة $y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

أ) جد احداثيات نقط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y, وعيّنها في هيئة المحاور.

ب) هل يوجد للرسم البياني للدالة نقط تقاطع مع المحور x؟ علّل!

جـ) مشتقة الدالة هي $y' = \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

- جد نقطة مشبوهة وعيّنها في هيئة المحاور.
- ميّز نوع النقطة المشبوهة. من أجل ذلك اختر نقطاً أخرى حسب الحاجة.

د) ارسم رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

هـ) هل يوجد للدالة خط تقارب؟ علّل!

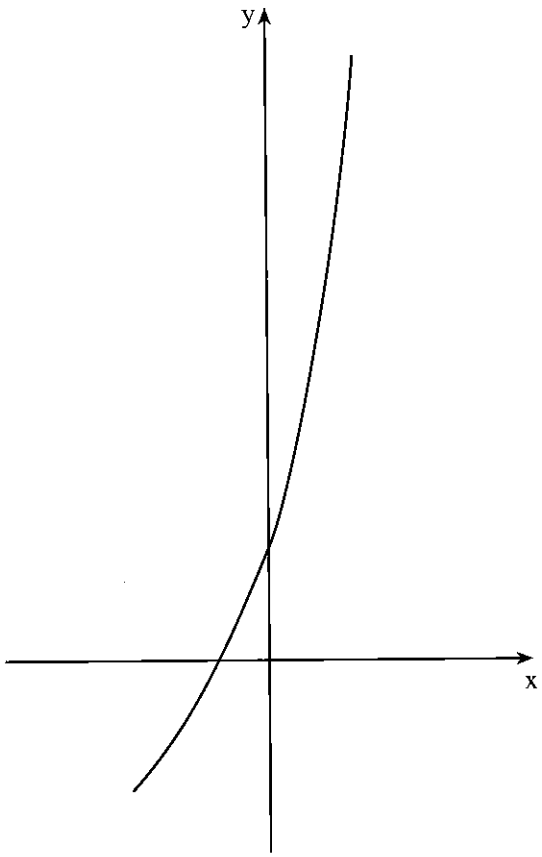
و) سجّل مجالات التصاعد والتنازل؟

8. في الشكل أمامك، رسم تقريبي للرسم البياني للدالة $y = 2e^x + x$.

أ) جد احداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور y.

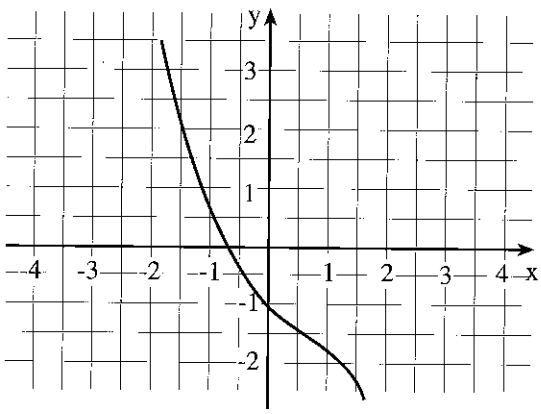
ب) ارسم مماساً للرسم البياني للدالة في النقطة المذكورة.

جـ) اشتق وجد ميل المماس الذي رسمته.
ما هي معادلة المماس؟



9. الرسم البياني هو للدالة $y = x^2 - e^x$.

أ) احسب الاحداثي y للنقطة (A(-1, الواقعة على الرسم البياني للدالة، وعيّنها في هيئة المحاور.

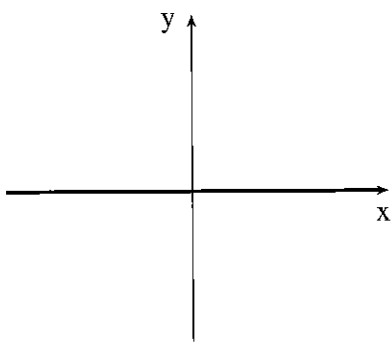


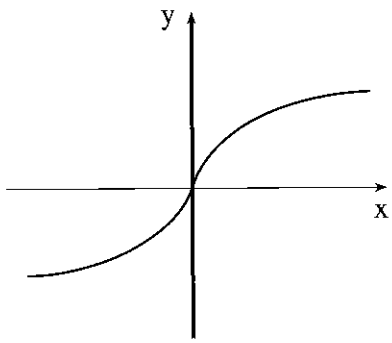
ب) ارسم مماساً للرسم البياني للدالة في النقطة المذكورة، واقرأ معادلته بالتقريب.

جـ) اشتق وجد ميل المماس في النقطة A .
قارن مع قيمة الميل الذي سجلته في المعادلة من البند (ب).

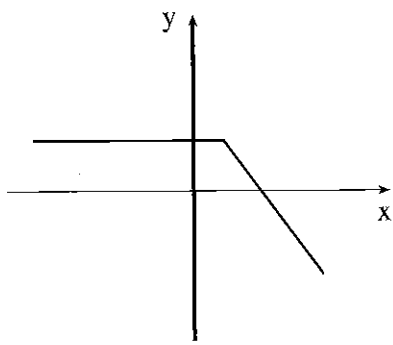
دالتان عكسيتان

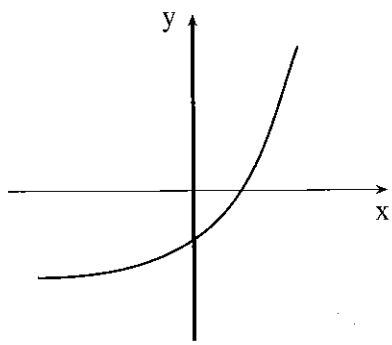
1. ضع على هيئة المحاور، الرسم البياني الشفاف المشابه (الرسم البياني الشفاف 4) بحيث ينتج تناظر عكسي للتناظر المرسوم هنا. (ضعه بحيث يقع المحور المشدد على المحور x مع المحافظة على اتجاه المحورين). أزح الرسم البياني الناتج الى هيئة المحاور المجاورة.





2. i) ارسم لكل واحد من الرسمين البيانيين، الرسم البياني للتناظر العكسي. (يمكنك الاستعانة برسم الرسم البياني على الورقة الشفافة الفارغة في آخر الكراس).

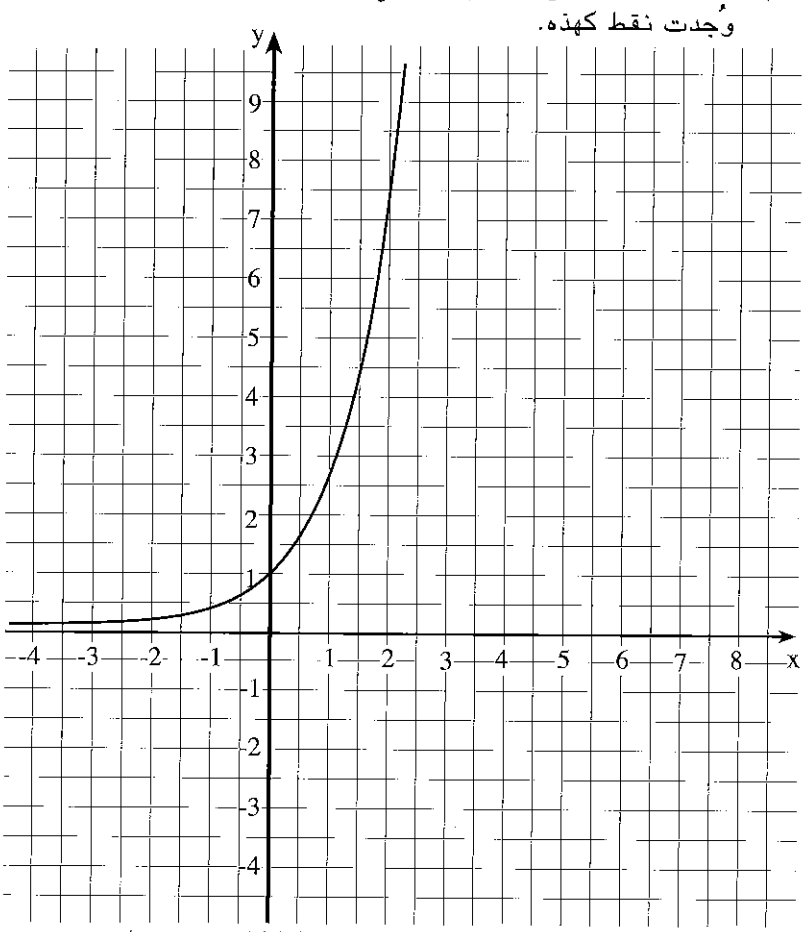




ii) ارسم في كل بند، خط التماثل للتناظر والتناظر العكسي له. ما هي معادلته؟

3. أ) ضع الرسم البياني الشفاف 5, بحيث ينتج الرسم البياني للدالة العكسية لِ $y = e^x$

ب) سجّل نقط تقاطع الرسم البياني للدالة العكسية مع المحورين، إن وُجدت نقط كهذه.



جـ) هل يوجد خط تقارب للدالة العكسية؟ اذا كان نعم – ما هو؟

د) لأية قيم x تكون الدالة العكسية معرّفة؟

هـ) هل الدالة العكسية تصاعدية أم تنازلية لكل قيمة x ؟

و) في أي مجال الدالة العكسية سالبة وفي أي مجال هي موجبة؟

ز) في أي **أرباع** يمر الرسم البياني لِ e^x وفي أيها يمر الرسم البياني للدالة العكسية لها؟

نرمز للدالة العكسية لِ e^x بواسطة $\ln(x)$. (لن لِ x أو لن x.)

4. أ) أمامك الرسم البياني للدالة $y = \ln(x)$. اقرأ حسب الرسم البياني بالتقريب، إن أمكن.

$\ln(0.5) =$

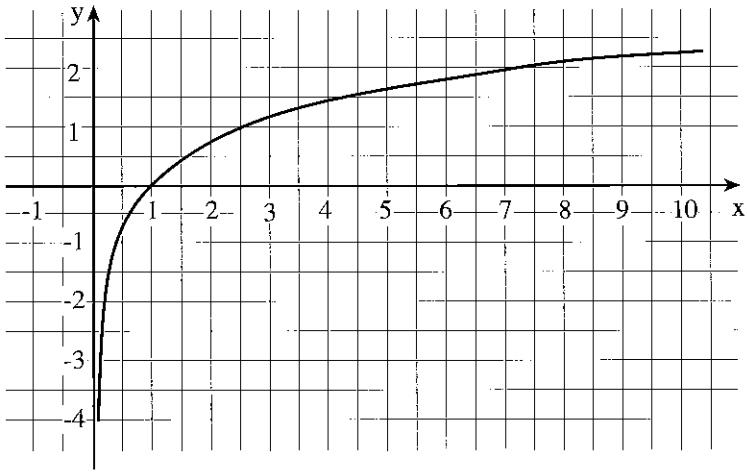
$\ln(1) =$

$\ln(e) =$

$\ln(5) =$

$\ln(7) =$

$\ln(-1) =$

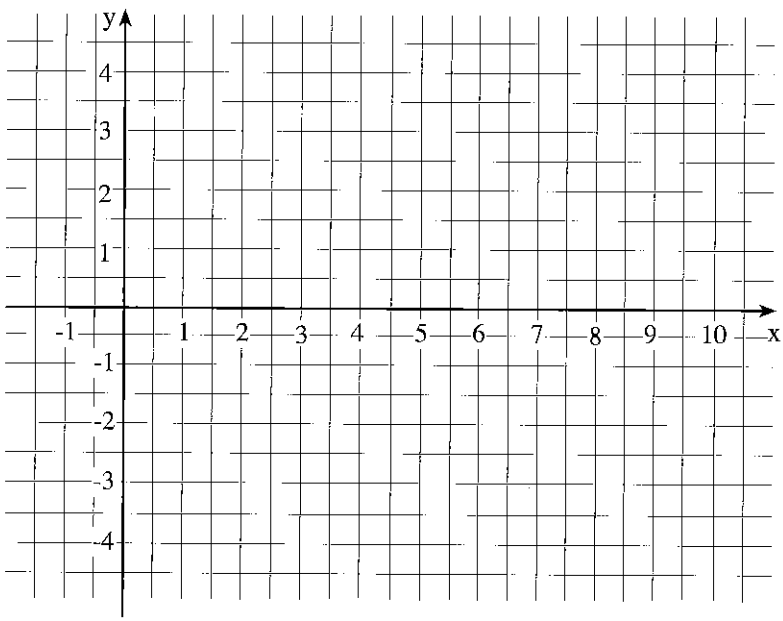


ب) افحص اجاباتك بمساعدة الحاسبة

	ln

5. معطاة الدالة $f(x) = \ln(x - 2)$.

أ) احسب $f(2.1)$, $f(2.5)$, $f(3)$, $f(5)$
وعيّن النقط في هيئة المحاور.



ب) لأية قيم من الآتية لا يمكنك ان تحسب قيمة الدالة؟
$x = 4.5$, $x = 3.5$, $x = 2$, $x = 0$, $x = 1$

جـ) لأية قيم x تكون الدالة معرّفة؟

د) أية ازاحة يجب تنفيذها على الرسم البياني للدالة $y = \ln(x)$
للحصول على الرسم البياني للدالة $y = \ln(x - 2)$ ؟

6. $y = e^x$ و $y = \ln(x)$ هما دالتان، الواحدة عكسية للأخرى. يعني، وظيفتا x و y "مبدلتان" فيهما.

$$x = \ln(y)$$

الدالة العكسية لها $y = e^x$

i) أكمل: اذا كان $\ln(7.389) = \square$

فان $7.389 = e^{\square}$

7.389	ln

ii) سجّل حسب الصورة $__ = \ln(__)$ وافحص بمساعدة الحاسبة.

أ) $e^3 = 20.09$ $\quad \ln(____) = __$

ب) $e^{0.5} = 1.649$ $\quad \ln(____) = __$

جـ) $e^{10} = 22026$ $\quad$ ———————

د) $e^{-1} = 0.3679$ $\quad$ ———————

7. سجّل حسب الصورة $e^{\square}$ وافحص بمساعدة الحاسبة.

أ) $\ln(8) = 2.079$

$e^{2.079} = ___$ افحص:

2.079	e^x

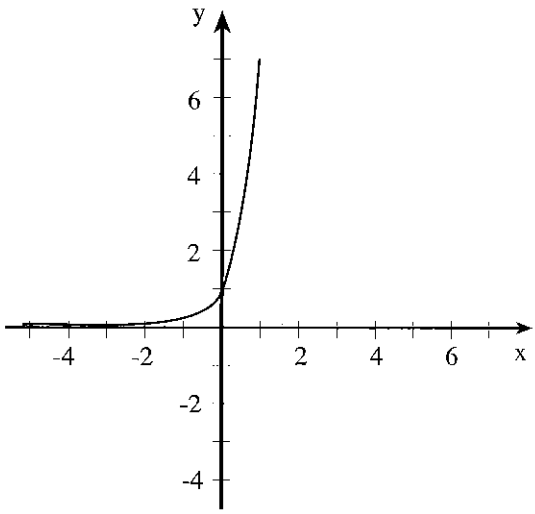
ب) $\ln(10) = 2.3026$

جـ) $\ln(1) = 0$

د) $\ln 0.1 = -2.3026$

هـ) $\ln(e) = 1$

8. ضع الرسم البياني الشفاف 6 بحيث ينتج الرسم البياني للدالة العكسية لِ $y = 10^x$.



أ) ما هي نقط تقاطع الرسم البياني للدالة العكسية مع المحورين؟

ب) هل يوجد خط تقارب للدالة العكسية؟ اذا كان نعم – ما هو؟

جـ) لأية قيم x الدالة العكسية سالبة ولأية قيم x هي موجبة؟

د) لأية قيم x تكون الدالة العكسية غير معرّفة؟

نرمز للدالة العكسية لِ 10^x بواسطة $\log(x)$ (لوج لِ x أو لوج x)

في الواقع، لكل دالة أسّية يوجد دالة عكسية (تدعى دالة لوغارتمية).
الدالتان الهامتان من هذه العائلة هما الدالتان اللتان عرفتهما $y = \ln(x)$ وَ $y = \log(x)$ وتظهران أيضاً في الحاسبة.

9. $y = 10^x$ و $y = \log(x)$ هما دالتان، الواحدة عكسية للأخرى. يعني وظيفتا x و y "متبادلتان" فيهما.

$$x = \log(y)$$

$$y = 10^x$$

أكمل: $\square = \log(100{,}000)$

$$100{,}000 = 10^{\square}$$

احسب بدون الحاسبة.

أ) $\log(100) =$ د) $\log(10^5) =$

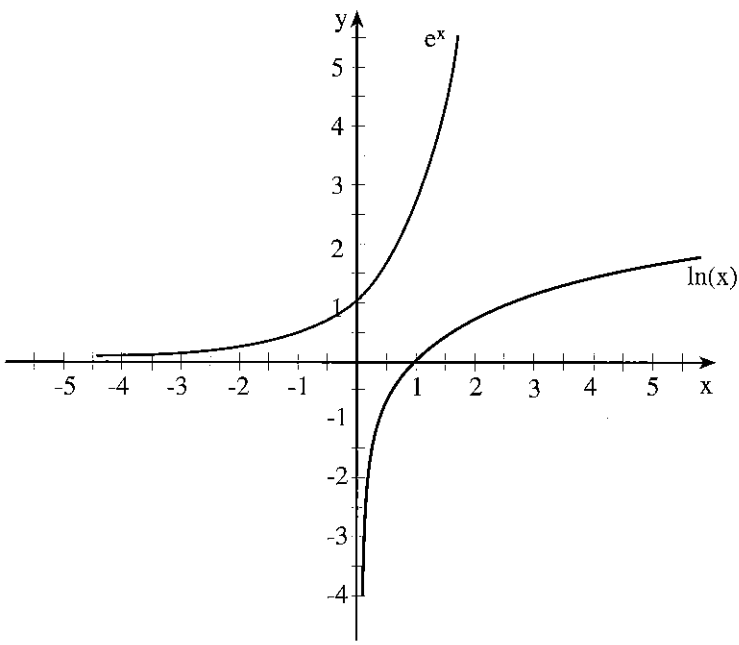
ب) $\log(10) =$ هـ) $\log(0.1) =$

جـ) $\log(1) =$ و) $\log(0.01) =$

افحص اجاباتك بمساعدة الحاسبة.

تمارين

10. استعن بالرسمين البيانيين وافحص أياً من الادّعاءات الآتية صحيح. اذا كان الادعاء غير صحيح، "صححه" بحيث ينتج ادّعاء صحيح.



أ) للدالتين توجد نقطة تقاطع واحدة مع المحور x .

ب) الدالتان تصاعديتان لكل x.

جـ) الدالة $y = \ln(x)$ موجبة لكل x.

د) الدالة $y = e^x$ موجبة لكل x.

هـ) الدالة $y = \ln(x)$ معرّفة فقط عندما $x > 0$.

و) للدالتين يوجد خط تقارب.

ز) للدالتين توجد نقطة تقاطع مع المحور y.

11. معطاة الدالة $f(x) = \ln(x + 2)$

أ) احسب إن أمكن:

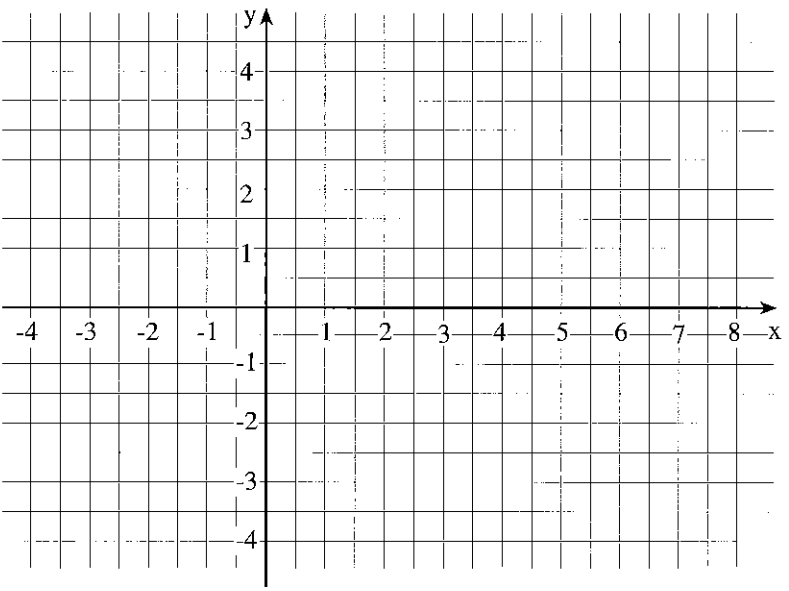
$f(0) =$ $f(1) =$ $f(4) =$ $f(5) =$

$f(-1.5) =$ $f(-1) =$ $f(-0.5) =$

... $f(-3) =$ $f(-1.9) =$ $f(-2) =$

ب) لأية قيم x تكون الدالة معرّفة؟ علّل!

جـ) ارسم الرسم البياني للدالة.



د) أية ازاحة يجب تنفيذها على الرسم البياني للدالة $y = \ln(x)$ للحصول على الرسم البياني للدالة $y = \ln(x + 2)$ ؟

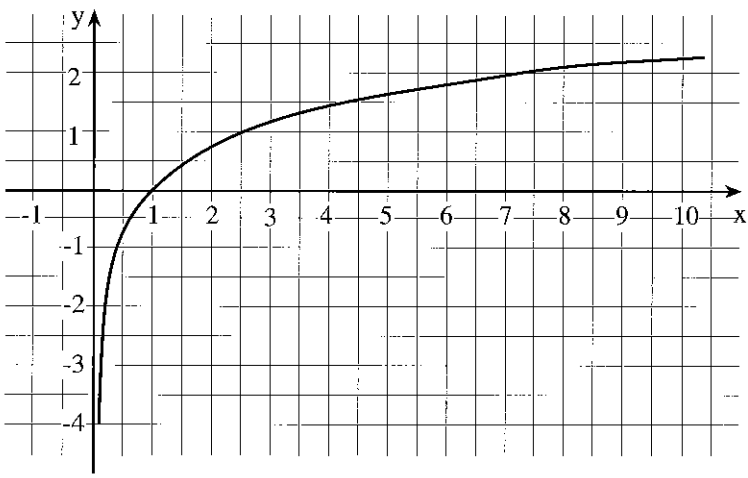
12.الرسم البياني للدالة $y = \ln(x)$ مرسوم في هيئة المحاور.

أ) $y = 1 + \ln(x)$

ب) $y = \ln(x - 1)$

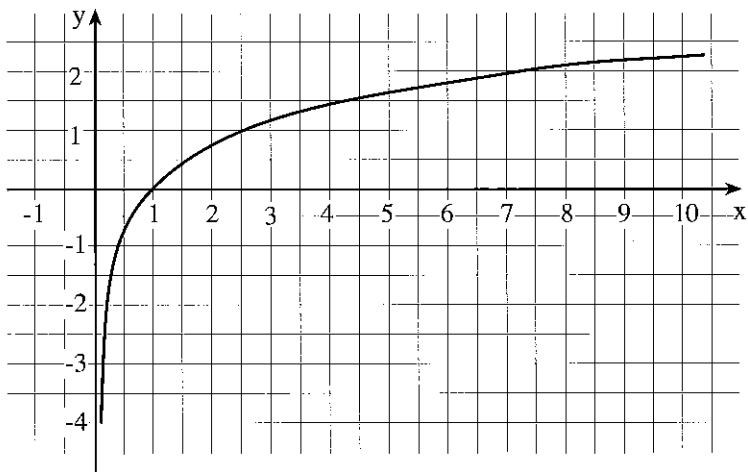
جـ) $y = \ln(x + 1)$

د) $y = \ln(-x)$



مشتقة الدالة $y = \ln(x)$

1. أمامك الرسم البياني للدالة $y = \ln(x)$.



أ) لأية قيمة x الدالة $y = \ln(x)$ معرّفة؟

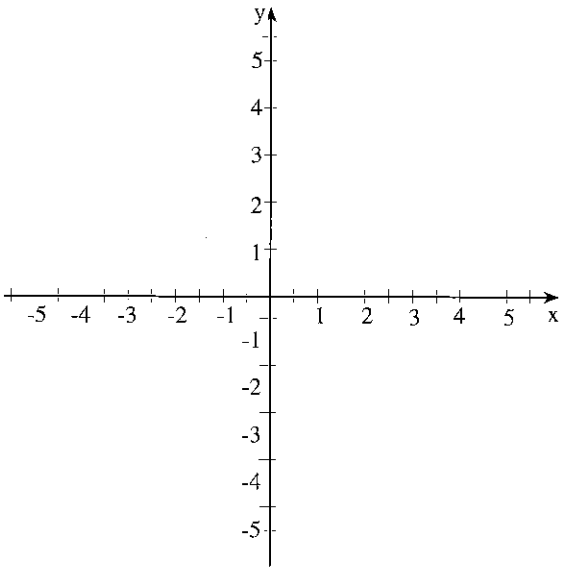
ب) ماذا يمكنك ان تقول عن **اشارة ميل** الرسم البياني للدالة في نقط مختلفة؟

جـ) ماذا يمكنك ان تقول عن مشتقة الدالة؟ هل هي تصاعدية أم تنازلية؟
ماذا يمكنك ان تقول عن **ميل** الرسم البياني للدالة عندما تكبر قيمة x ؟

يتبع ←

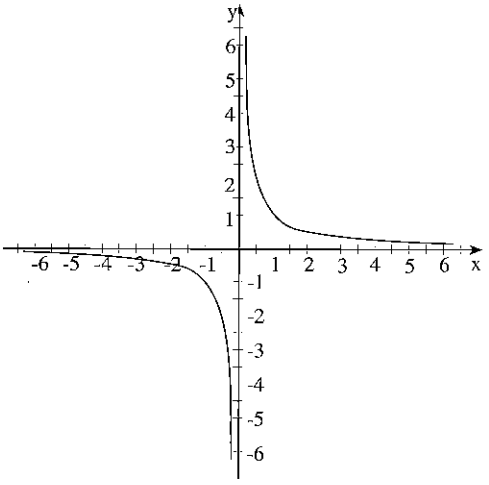
هـ) ارسم رسماً بيانياً لدالة تحقق الشروط الآتية:

i) معرّفة في $x > 0$. ii) موجبة. iii) تنازلية.



هل الرسم البياني الذي رسمته ملائم لخواص المشتقة التي سجّلتها في البنود أ – جـ؟

في فصل سابق، تعرّفت على الدالة $y = \frac{1}{x}$.



الفرع الأيمن للدالة، يحقق جميع الخواص التي سجّلتها في البنود أ – د، وهو طبعاً مشابه للرسم البياني الذي رسمته في البند (هـ).

مشتقة الدالة $y = \ln(x)$ $(x > 0)$ هي $y' = \frac{1}{x}$.

2. جد المشتقة:

أ) $y = \ln(x) + 5$

ب) $y = 3\ln(x)$

جـ) $y = 4x + 2\ln(x)$

د) $y = \ln(x) + 8$

هـ) $y = x^2 + e^x + 3\ln(x)$

و) $y = 2e^x - 5\ln(x)$

ز) $y = x + 2\ln(x) + e \cdot x$

ح) $y = \ln(x) + x(x^2 - 1)$

3. معطاة الدالة $y = \ln(x) - x$.

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟

ب) اشتق وجد نقطة مشبوهة، ثم عيّنها في هيئة المحاور.

جـ) احسب وعيّن نقطاً أخرى، بحيث تتمكن من تمييز نوع النقطة المشبوهة (انتبه لمجال التعريف الذي سجلته في البند أ).

د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني وأجب حسَبَه:
- لأية قيم x الدالة تصاعدية/ تنازلية؟
- هل يوجد للرسم البياني للدالة نقط تقاطع مع المحورين؟ اذا كان نعم – سجّل احداثياتها بالتقريب.
- لأية قيم x الدالة موجبة، ولأية قيم x هي سالبة؟

4. حل.

أ) $x^2 = 4$

ب) $x^2 = \frac{1}{4}$

جـ) $x^3 = 1$

د) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$

هـ) $x - \frac{1}{x} = 0$

و) $4x - \frac{1}{x} = 0$

5. معطاة الدالة $y = 2x^2 - \ln(x)$.

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟

ب) أكمل الاحداثي y, إن أمكن، وعيّن في هيئة المحاور.

(2,) (0,)

(1,) $(\frac{1}{4}, \quad)$

(−1,)

جـ) جد نقطة مشبوهة وعيّنها في هيئة المحاور.

د) ما نوع النقطة المشبوهة؟
أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

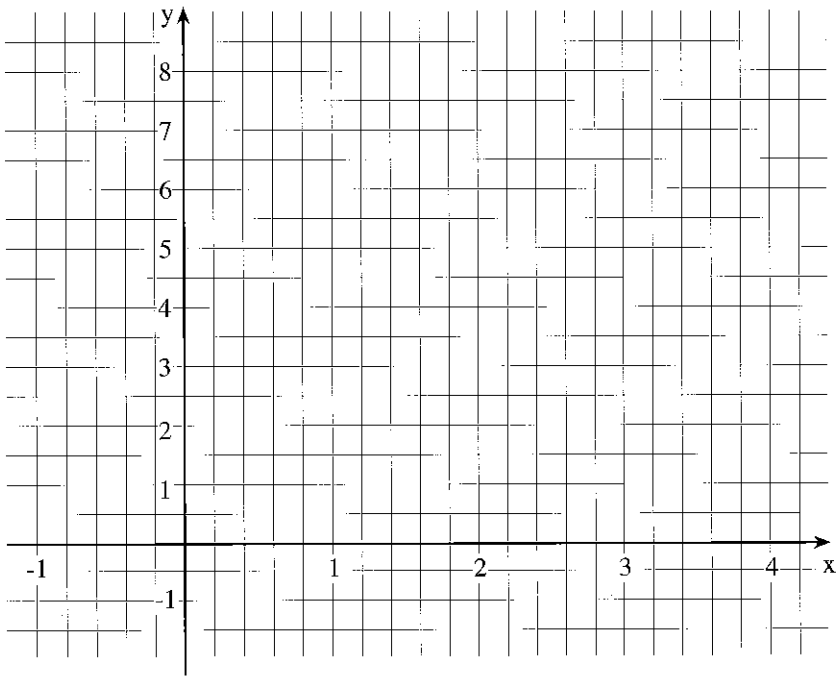
هـ) لأية قيم x الدالة تصاعدية/ تنازلية؟
موجبة/ سالبة؟

6. معطاة الدالة $y = \frac{\ln(x)}{x}$

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟

ب) النقطة (2.72,) هي نقطة قصوى وحيدة للرسم البياني للدالة. أكمل الاحداثي y للنقطة وعيّنها في هيئة المحاور.

جـ) احسب نقطاً أخرى وبيّن نوع النقطة القصوى.



د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة، وسجّل مجالات التصاعد والتنازل.

هـ) لأية قيم x الدالة موجبة؟ سالبة؟

تمارين

7. معطاة الدالة $y = x + \ln(x)$

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟

ب) اشتق **وعلّل**، لماذا لا يوجد للدالة نقط قصوى.

جـ) استعن بحساب احداثيات النقط الآتية، وارسم في دفترك رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

$(\frac{1}{4}, \quad)$ $(\frac{1}{2}, \quad)$

$(1, \quad)$ $(2, \quad)$

$(4, \quad)$

د) هل الدالة تصاعدية/ تنازلية لكل قيمة x؟

8. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

جد المشتقة:

أ) $y = \ln(x) + x^2 + \frac{1}{x}$ د) $y = \frac{2}{x} - e^x + 3\ln(x)$

ب) $y = 2e^x + \sqrt{x} + \ln(x)$ هـ) $y = 3x^3 + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{x}$

جـ) $y = 4\sqrt{x} + 5 + 4 \cdot \ln(x)$ و) $y = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x)$

9. حل المعادلات (لبعض منها لا يوجد حل. أشر اليها في حالة كهذه).

أ) $9x - \frac{1}{x} = 0$ هـ) $5x - \frac{1}{x} = 0$

ب) $x^2 - \frac{1}{x} = 0$ و) $x + \frac{1}{x} = 0$

جـ) $x^3 + \frac{1}{x} = 0$ ز) $2\sqrt{x} - 8 = 0$

د) $x^2 - \frac{8}{x} = 0$ ح) $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} = 0$

10. معطاة الدالة $y = x^3 - 3\ln(x)$.

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟
ب) اشتق وجد نقطة مشبوهة، ثم عيّنها في هيئة المحاور.
جـ) احسب احداثيات نقط أخرى، وبيّن نوع النقطة المشبوهة.
د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

11. معطاة الدالة $y = 2\ln(x) - x$.

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟
ب) اشتق وجد نقطة مشبوهة، ثم عيّنها في هيئة المحاور.
جـ) احسب احداثيات نقط اخرى، وبيّن نوع النقطة المشبوهة.
د) أكمل رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

12. معطاة الدالة $y = 2\sqrt{x} - \ln(x)$

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟

ب) اشتق وافحص، هل النقطة (1,) هي نقطة مشبوهة.
أكمل الاحداثي y .

جـ) معلوم أن (1,) هي نقطة مشبوهة وحيدة. ما نوعها؟

13. معطاة الدالة $y = \ln(x) + \frac{1}{x}$

أ) لأية قيم x الدالة معرّفة؟

ب) اشتق وجد نقطة مشبوهة، ثم عيّنها في هيئة المحاور.

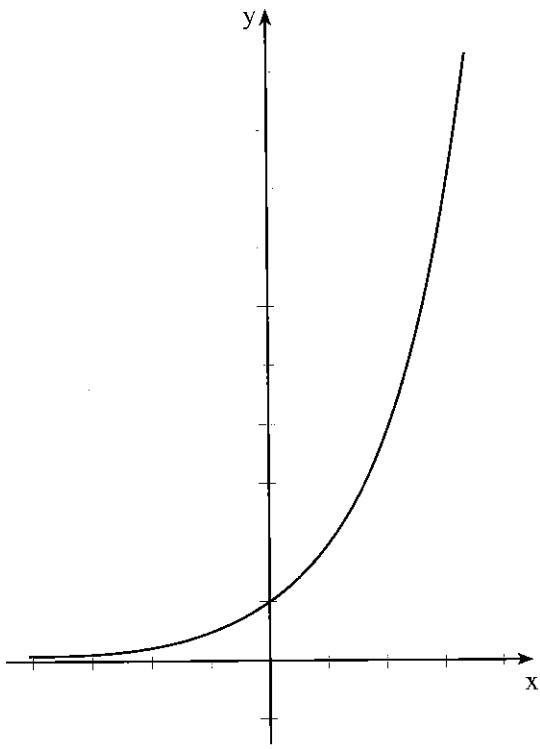
جـ) ما نوع النقطة المشبوهة؟

د) ارسم رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

هـ) سجّل مجالات التصاعد/التنازل.

الخط البياني الشفاف 1 (أ)

ملائم للدالة $y = 2^x$

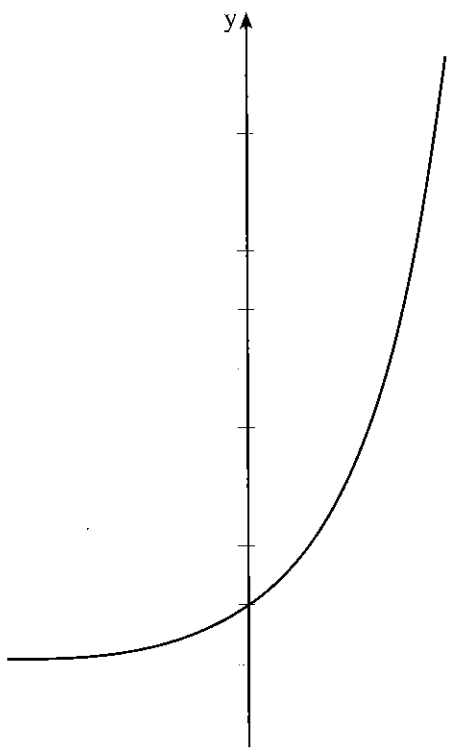


(أ) ١ ـ الشكل البياني الذي

يمثل العلاقة $y = 2^x$

الخط البياني الشفاف 1 (ب)

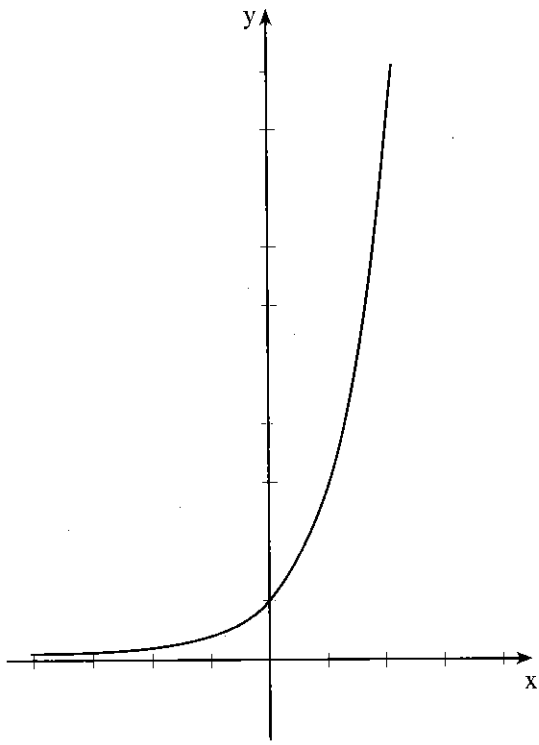
ملائم للدالة $y = 2^x$



الحل البياني للمثال 1 (ب)

على الفترة $y = 2^x$

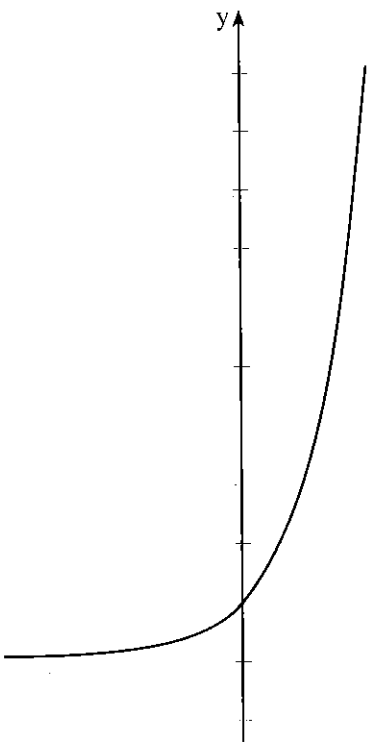
الخط البياني الشفاف 2 (أ)



ملائم للدالة $y = 3^x$

ملائم للدالة $y = 3^x$

الخط البياني الشفاف 2 (ب)



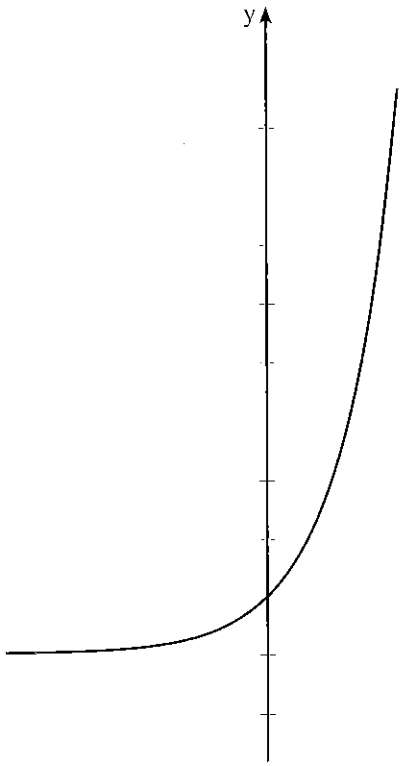
(أ) ارسم البياني الممثل للدالة f

المنحنى الممثل للدالة $y = 3^x + 4$

المنحنى الممثل للدالة $y = 3^x + 4$

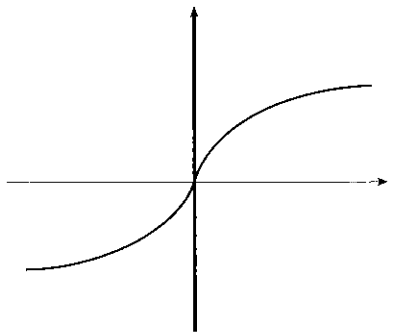
(ب) ارسم البياني الممثل للدالة f

الخط البياني الشفاف 3



ملائم للدالة $y = e^x$

الخط البياني الشفاف 4

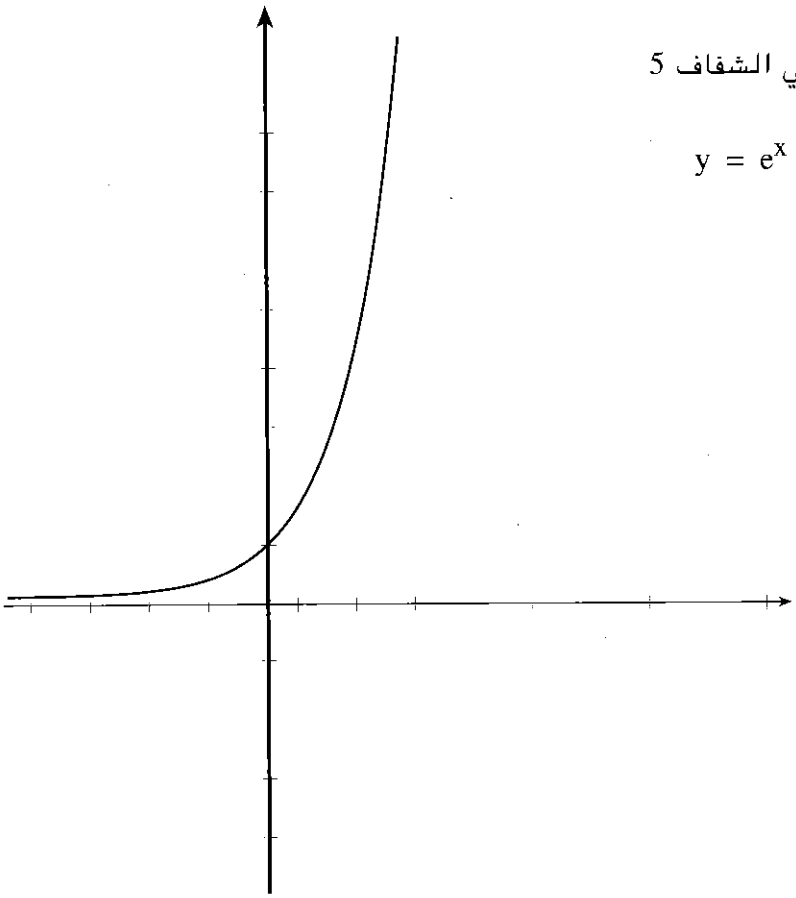


٤ـ الشكل البياني الذي يمثل العلاقة $ص = ٢^{س}$

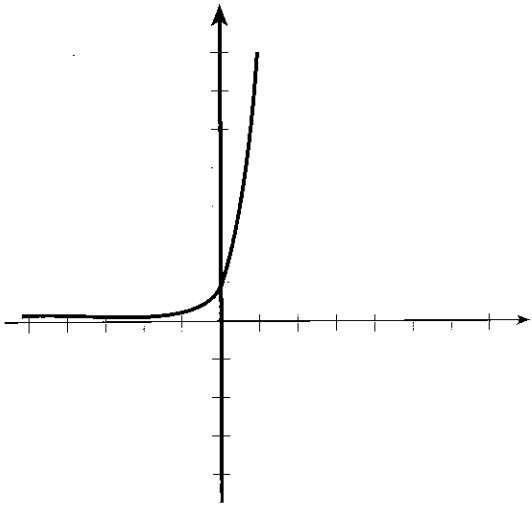
٥ـ الشكل البياني الذي يمثل العلاقة $ص = س^{٣}$

الخط البياني الشفاف 5

ملائم للدالة $y = e^x$



الخط البياني الشفاف 6



اقص البطاقة الشكل ج

على الطالب $y = e^{x}$

اقص البطاقة الشكل د