

Электродинамика сплошных сред. Конспект

А.Н. Поддубный, Н.В. Леппенен
*loffe Institute**

(Дата: 15 декабря 2021 г.)

<https://classroom.google.com/c/MzIwMTY5NTc3NTg5>

Google class code “zcx6q76”

Соответствие итоговой оценки и числа набранных баллов в д/з и контрольных:

5 – 65%, 4 – 50%, 3 – 30%

Содержание

I. Макроскопические уравнения Максвелла. Вывод для разных систем	3
A. Усреднение электромагнитных полей	3
B. Проводники	4
Понятие проводимости	4
Проводник в квазиэлектростатическом приближении	5
Квазимагнитостатика. Скин-слой	9
Сверхпроводники	10
C. Диэлектрики	11
Понятие поляризации. Модели поляризуемости	11
Задача о поле в шаре	16
Метод функций Грина	19
Задача о поле над плоскостью	24
Метод конформных отображений	25
D. Парамагнетики и диамагнетики	27
Понятие намагниченности	27

*Electronic address: poddubny@coherent.ioffe.ru, nik-leppenen@yandex.ru

	2
Парамагнитный и диамагнитный отклик.	29
Левитация диамагнетиков в магнитном поле	32
II. Электромагнитные волны	37
A. Волны в изотропных и анизотропных средах	37
Одноосные среды	39
B. Временная дисперсия диэлектрической проницаемости.	42
Энергия и групповая скорость волнового пакета	42
Запаздывающий отклик и причинность. Соотношения Крамерса-Кронига.	47
C. Оптическая активность. Пространственная дисперсия	50
Эффект Фарадея	50
Естественная оптическая активность. Пространственная дисперсия	53
Параметры Стокса	59
D. Нелинейные оптические явления	62
Нелинейная поляризуемость	62
Симметричные свойства	64
Виды нелинейных оптических эффектов	65
Отклик $\chi^{(2)}$ в модели среды как массива нелинейных осцилляторов	68
III. Слоистые среды	69
A. Отражение волны, падающей на плоскую границу двух сред	69
Поверхностный плазмон-поляритон	72
B. Многослойные системы	75
1. Метод матриц переноса	75
2. Слоистые периодические среды	76
Приближение эффективной среды	78
Одномерный фотонный кристалл	79
Метод плоских волн. Двухволновое приближение	81
Коэффициент отражения в двухволновом приближении	83
C. Резонаторы и волноводы	85
Брэгговский резонатор	85
Планарный волновод	88

IV. Шары и массивы шаров	89
A. Рассеяние на одиночном шаре	89
Сечения рассеяния и поглощения	89
Поляризация неба	93
Сечение экстинкции. Оптическая теорема	94
Резонансное рассеяние малой частицей	98
B. Приближение Максвелла-Гарнетта	100
1. Наводящие соображения	100
2. Строгий вывод	102
3. Отражение света в модели дискретных диполей. Теорема погашения	105
C. Приближение Бруггемана	107
D. За рамками эффективной среды	110

I. Макроскопические уравнения Максвелла. Вывод для разных систем

A. Усреднение электромагнитных полей

Литература: Andrew Zangwill, Modern Electrodynamics (Cambridge, 2012), параграф 2.3; Ландау и Лифшиц, т.8;

Микроскопические уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{micro}} = 4\pi\rho_{\text{micro}} \quad (\text{I.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{micro}} = 0 \quad (\text{I.2})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{micro}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{micro}}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_{\text{micro}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{micro}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{micro}} \quad (\text{I.4})$$

Решать микроскопические уравнения Максвелла для систем с большим числом частиц неудобно и часто не нужно. Удобно выполнить усреднение по объему, большому по сравнению с расстоянием между атомами, электронами и т.д.:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3s \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) \quad (\text{I.5})$$

Физический смысл объема усреднения Ω зависит от системы — газ, жидкость, твердое тело.

Теперь \mathbf{E} — медленно меняющееся поле.

Уравнения Максвелла для макроскопических полей сохраняют свой вид, однако их нужно дополнить *материальными соотношениями*, связывающими усредненные значения ρ и \mathbf{j} с макроскопическими электрическими и магнитными полями. Материальные соотношения зависят от конкретной системы и определяются из соответствующих микроскопических задач квантовой механики или статической физики. Далее будут рассмотрены примеры различных систем — проводники, диэлектрики, и т.д. и соответствующие материальные соотношения.

В. Проводники

Понятие проводимости

Литература: Andrew Zangwill, *Modern Electrodynamics* (Cambridge, 2012), глава 9, Н.А. Хаус and J.R. Melcher, *Electromagnetic Fields and Energy* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989), глава 7.

Пример. Рассмотрим систему свободных зарядов в электрическом поле. плотность тока:

$$\mathbf{j}_{\text{micro}} = \sum_{a=1}^N q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)\mathbf{v}_a \quad (\text{I.6})$$

где \mathbf{v}_a — скорость точечного заряда a . Уравнение на движение заряда:

$$m\dot{\mathbf{v}}_a + m\frac{\mathbf{v}_a}{\tau} = q\mathbf{E} \quad (\text{I.7})$$

где τ — время релаксации (например, за счет столкновений с примесями или фононами). В стационарном режиме

$$\mathbf{v}_a = \mu\mathbf{E}, \mu = \frac{q\tau}{m} \text{ — подвижность.} \quad (\text{I.8})$$

Характерные числа: (удобно считать в СИ, т.к. поле в В/м)

$q = 1.6 \times 10^{-19}$ К, $\tau \sim 10^{-14}$ с (типичное значение для металлов), $m \sim 10^{-30}$ кг
 $\Rightarrow \mu \sim 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}) \sim 10^1 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Поэтому типичные средние скорости для поля $\sim V/m$ получаются порядка 10^{-3} м/с (совпадает с числом в Zangwill, §9.3, примечание б) и значительно меньше тепловых скоростей.

В полупроводниках τ длиннее и легко достижима $\mu \sim 10^3 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ (хотя бывает и $10^6 \div 10^7 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, см [Ю,Кардона, Основы физики полупроводников, §5.2]).

Пусть объем структуры $V = N/n$, где n – концентрация. Усредняя (I.6) по объему V получаем закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (\text{I.9})$$

Georg Simon Ohm (1789–1854) где проводимость по формуле Друде (Paul Drude, 1863 – 1906) равняется

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m}. \quad (\text{I.10})$$

Типичные значения для металлов: $e \sim 5 \times 10^{-10}$ СГСЭ, $\tau \sim 10^{-14}$ s, $m \sim 10^{-27}$ g, $n \sim 10^{23}$ см⁻³, $\sigma \sim 10^{17}$ 1/s. Размерность проводимости в СГС— обратное время! (в СИ получим для металла $\sigma \sim 10^7$ 1/Ω · m).

Для полупроводников проводимость сильно зависит от степени легирования и на 7-10 порядков меньше, т.к. меньше концентрация n (собственная концентрация в кремнии при комнатной температуре $\sim 10^{10}$ см⁻³.)

Оригинальная работа Ома 1827 г. на немецком

Проводник в квазиэлектростатическом приближении

Будем считать что все времена изменения полей T много больше чем L/c , где L – характерный размер системы. В этом случае $H \sim EL/cT$, $\text{rot } \mathbf{E} \sim EL/c^2 T^2 \ll E/L$, т.е. можно пренебречь поправками к $\text{rot } \mathbf{E}$ за счет генерации магнитного поля.

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{I.11})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.13})$$

Вопрос: как связать ρ и \mathbf{j} ?

Ответ — уравнение непрерывности,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (\text{I.14})$$

Отсюда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho = 0, \quad (\text{I.15})$$

$$\rho(t) = \rho(t=0)e^{-4\pi\sigma t}, \quad (\text{I.16})$$

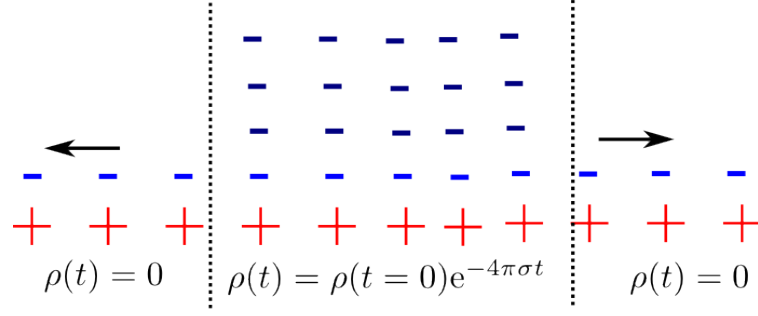


Рис. 1 Растекание заряда и максвелловская релаксация в проводнике

$1/4\pi\sigma$ — максвелловское время релаксации.

Вопрос — куда уходит заряд? Ответ — на поверхность. Через максвелловское время релаксации $E = \rho = j = 0$ (реально поле в проводник проникает, но лишь на несколько атомных слоев). Для металлов $\tau_m = 1/4\pi\sigma \sim 10^{-18}$ s. При этом получается $\tau_m \ll \tau \sim 10^{-14}$ с, а значит, нельзя использовать статическую проводимость — скорости зарядов в поле не успевают выйти на стационарное значение. Кроме того, при таком быстром изменении положения зарядов пойдут токи, сгенерируется магнитное поле и нарушится приближение $1/\tau_m \ll c/L$ — нужно будет учитывать запаздывание электромагнитного поля. Поэтому квазиэлектростатическое приближение неприменимо для металлов [см. также.: Zangwill, Application 18.1].

Для полупроводников время τ_m на 4-10 порядков больше и квазиэлектростатическое приближение применимо. [см. также таблицу 7.7.1 в Haus and Melcher]. Область применимости — $\omega \sim \sigma \ll (c/L)^2$ (заряд растекается быстрее, чем генерируется магнитное поле за счет тока смещения), см. рис. 2(а).

Отметим, что для металла ток — это ток электронов на фоне положительно заряженных ионов. Т.е. $\rho = 0$ — это значит, что заряды никуда не делись, просто выровнялось их распределение в пространстве (см. пример 7.7.1 в Haus and Melcher), см. рис. 1. Т.е. заряда в среднем может не быть, а постоянный ток при этом — идет! Это — особенность омической проводимости.

Максвелловская релаксация в низкоразмерных системах

тонкий 2D слой толщины d :

$$j_{x,s} = dj_x = \sigma_s E_x, j_{y,s} = dj_y = \sigma_s E_y \quad (\text{I.17})$$

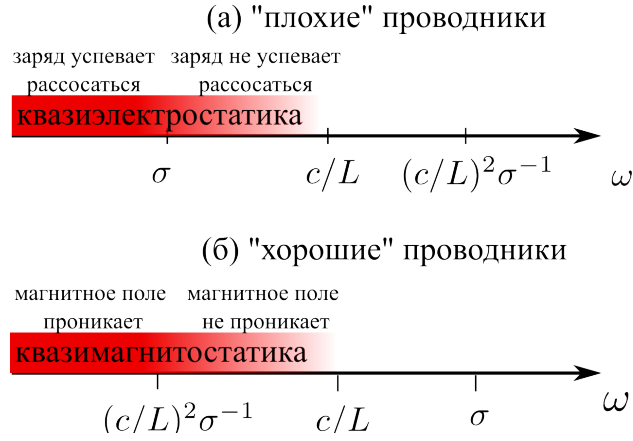


Рис. 2 Квази-электростатический (а) и квази-магнитостатический (б) режимы. Взято из Zangwill, рис. 14.12

где σ_s – поверхностная проводимость и \mathbf{j}_s – поверхностный ток. По размерности $\sigma_s = L/T$ – обратная скорость. Характеризует скорость рассасывания заряда.

В 1D имеем $j_x = S j_x = \sigma_l E_x$, где S – толщина сечения, и по размерности *кондактанс* $\sigma_l = L^2/T$ – коэффициент диффузии заряда.

Для рассасывания заряда в 2D слое: получим электростатическое поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (\text{I.18})$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial \varphi_s}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$\varphi(x, y) = \int \frac{dx' dy'}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} \rho_s(x', y'), \quad (\text{I.20})$$

В 1D проводе все похоже:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\varphi(z) = \int \frac{dz'}{|z - z'|} \rho_l(z'). \quad (\text{I.22})$$

Однако про $z = z'$ в интеграле будет логарифмическая расходимость. В реальности ее нет, т.к. провод имеет конечный радиус. Поэтому задачу можно подправить, регуляризовав потенциал за счет размытия заряда поперек провода:

$$\varphi(z) = \int \frac{dz'}{\sqrt{|z - z'|^2 + a^2}} \rho_l(z'), \quad (\text{I.23})$$

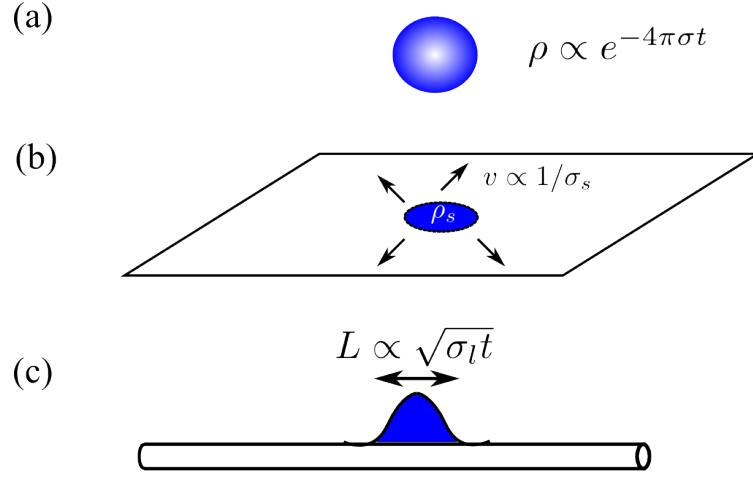


Рис. 3 Растекание заряда в объемной структуре (a), тонком слое (b) и проводе(c).

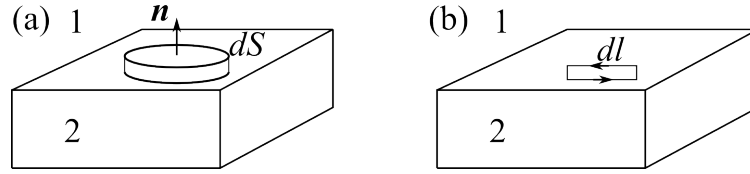


Рис. 4 Контуры интегрирования для вывода граничных условий (I.24) и (I.25).

где a — величина порядка радиуса провода.

Граничные условия

Рассмотрим границу двух проводящих сред с проводимостями σ_1 и σ_2 . Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \rightarrow \sigma_1 E_{n,1} = \sigma_2 E_{n,2}. \quad (\text{I.24})$$

Для доказательства проинтегрируем выражение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ по маленькому объему вокруг границы, показанному на рис. 4(a):

$$\int \operatorname{div} \mathbf{j} dV = \oint \mathbf{j} d\mathbf{S} \approx dS(j_{n,1} - j_{n,2}) \approx dS(\sigma_1 E_{n,1} - \sigma_2 E_{n,2}) = 0.$$

На границе с непроводящей средой $E_n = 0$, т.е. $\partial\varphi/\partial n = 0$, как и в модели идеального проводника. Поверхностная плотность зарядов $\rho_s = \frac{1}{4\pi} E_n$.

Одновременно из условия $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ получаем граничное условие на равенство тангенциальных компонент поля,

$$E_{t,1} = E_{t,2}. \quad (\text{I.25})$$

Соответствующее граничное условие определяется из равенства нулю интеграла $\int d\mathbf{S} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}$ по контуру на рис. 4(b).

Квазимагнитостатика. Скин-слой

См. ЛЛ8, §58 или Zangwill, §14.9.

Пусть по-прежнему размер образца мал (или частота низка, так что $\omega \ll c/L$).

Для реальных проводников (медь) и типичных частот $\sigma \sim 10^{18} \text{ s}^{-1} \gg \omega$. Поэтому омические токи больше, чем токи смещения. И нужно учитывать, что омические токи приводят к генерации магнитного поля.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \approx \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{I.26})$$

Критерий применимости: $\omega/cE \ll \sigma E$, т.е. $\sigma \gg \omega$, что легко реализуемо.

Одновременно

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\text{I.27})$$

так что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (\text{I.28})$$

т.к. $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ то

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (\text{I.29})$$

Характерный параметр частоты получается из оценки $\Delta H \sim H/L^2$, $\frac{\partial H}{\partial t} \sim \omega H$, так что $\omega \sim (c/L)^2 1/\sigma$, см. рис. 2(б).

Рассмотрим распространение плоской волны в таком проводнике,

$$H_x = H_0 e^{ikz - i\omega t} + c.c. \quad (\text{I.30})$$

(магнитное поле направлено вдоль x а зависит от z , т.к. $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$). Подставляя магнитное поле в таком в виде в (I.29) находим

$$k^2 = \frac{4\pi i \sigma \omega}{c^2}, \quad k = \pm \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c} (1 + i), \quad (\text{I.31})$$

откуда получаем, что

$$H_x \propto e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \quad (\text{I.32})$$

и магнитное поле проникает в проводник на глубину скин-слоя (см. рис. 5)

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \quad (\text{I.33})$$

Для $\omega = 2\pi 10^{15}$ Hz и $\sigma = 10^{18}$ 1/s имеем $\delta \sim 10$ nm. Для $\omega = 2\pi \times 100$ Hz имеем $\delta \sim 1$ cm (ср. с Zangwill, таблица 14.1).

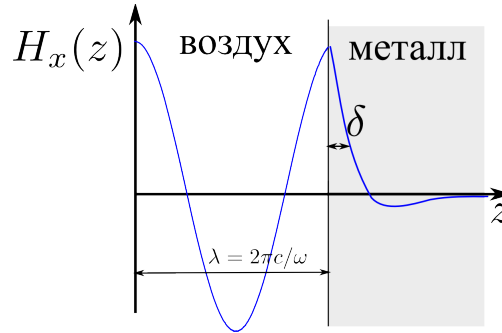


Рис. 5 Затухание магнитного поля в проводнике

На глубине больше скин-слоя $H = 0$, а значит, и $E = 0$ — экранировка электромагнитного поля.

NB: Если брать тонкий плоский слой толщины d , то на самом деле коэффициент пропускания будет мал уже для толщины, которая гораздо меньше чем скин-слой (см. задачу 4 2021 года).

на высоких частотах с $\omega \sim 1/\tau$ формула (I.31) по-прежнему работает, но нужно учитывать зависимость $\sigma(\omega)$.

Сверхпроводники

В сверхпроводнике в рамках т.н. лондоновского приближения можно положить $\tau \rightarrow \infty$ (рассеяние электронов не происходит). Тогда для проводимости получаем

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n \tau}{1 - i\omega\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{ie^2 n}{m\omega}. \quad (\text{I.34})$$

Подставляя эту формулу в (I.29) получим на частоте ω

$$\Delta H = -\frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} \mathbf{H} = \frac{1}{\delta'^2} \mathbf{H} \quad (\text{I.35})$$

где

$$\delta' = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n}} \quad (\text{I.36})$$

— лондоновская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Эта глубина порядка 100-1000 нм. Для больших образцов, размером больше чем δ' , можно считать, что магнитное поле внутри сверхпроводника не проникает, т.е. $\mathbf{H} = 0$ внутри. Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, имеем $H_{n,1} = H_{n,2} = 0$, т.е. нормальная компонента магнитного поля на границе сверхпроводника равна нулю.

Подробнее: Том 9 Ландау и Лифшица (Статистическая физика, часть 2), параграф 44.

С. Диэлектрики

Литература: Zangwill, глава 6.

Понятие поляризации. Модели поляризуемости

В диэлектрике нет собственных свободных зарядов. Пусть плотность заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_P(\mathbf{r}) + \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}), \quad (\text{I.37})$$

тогда $\int d^3r \rho_P(\mathbf{r}) = 0$ где интегрирование идет по объему охватывающему полностью диэлектрик (включая его поверхность). Здесь ρ_{ext} — внешний заряд. Давайте рассмотрим одномерный диэлектрик как совокупность молекул, в каждой из которых положительный заряд q смещен на $+a/2$, а отрицательный на $-a/2$, так что дипольный момент молекулы равен qa , см. также рис. 7.

Тогда микроскопическая плотность заряда равняется

$$\rho(x) = \sum_r q[\delta(x - a/2 - r) - \delta(x + a/2 - r)], \quad (\text{I.38})$$

где r — координаты центров молекул. Плотность можно приближенно записать как

$$\rho(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_r qa\delta(x - r) = -\frac{\partial}{\partial x} P_x(x), \quad (\text{I.39})$$

где

$$P_x(x) = \sum_r qa\delta(x - r) \quad (\text{I.40})$$

это плотность дипольного момента. В макроскопическом приближении, для усредненной плотности, можно считать что P_x распределена равномерно внутри объема диэлектрика и равна нулю снаружи. При этом на поверхности образуется поверхностная

плотность зарядов $\sigma = -P_x$ так что $\rho \propto P_x[\delta(x - L/2) - \delta(x + L/2)]$, где L – толщина диэлектрика.

В более общем случае напишем

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (\text{I.41})$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ – вектор поляризации и пусть $\mathbf{P} = 0$ снаружи диэлектрика.

Тогда

$$\int d^3r \rho_P(\mathbf{r}) = -\int d^3r \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{I.42})$$

Здесь S – поверхность охватывающая весь диэлектрик, на ней $\mathbf{P} \equiv 0$, см. рис. 6.

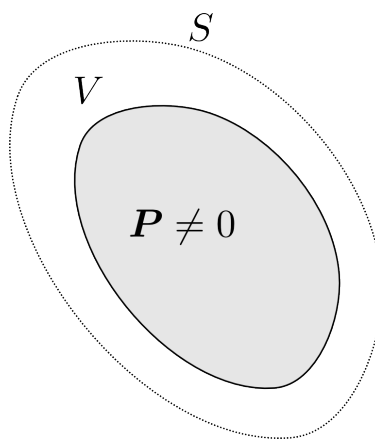


Рис. 6 Область интегрирования в (I.42)

Если проинтегрировать $\rho_P(\mathbf{r})$ по объему вблизи края проводника и учесть что снаружи $\mathbf{P} = 0$, то можно получить, что поверхностная плотность заряда $\rho_s = P_n(\mathbf{r})$. Формально т.к. $\partial P_n / \partial n \neq 0$ то в плотности заряда появляются сингулярные слагаемые, описывающие поверхностный заряд.

Физический смысл поляризации \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} \int_V d^3r P_x &= \int d^3r P_x \frac{\partial}{\partial x} x + \int d^3r P_y \frac{\partial}{\partial y} x + \int d^3r P_z \frac{\partial}{\partial z} x \\ &= -\int d^3r x \left(\frac{\partial}{\partial x} P_x + \frac{\partial}{\partial y} P_y + \frac{\partial}{\partial z} P_z \right) = \int d^3r x \rho_P = p_x \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

где \mathbf{p} – макроскопический дипольный момент. Таким образом, \mathbf{P} имеет физический смысл плотности дипольного момента.

Простейшая модель диэлектрика Рассмотрим простейшую модель диэлектрика в однородном статическом электрическом поле $\mathbf{E} \parallel x$, см. рис. 8. Диэлектрик состоит

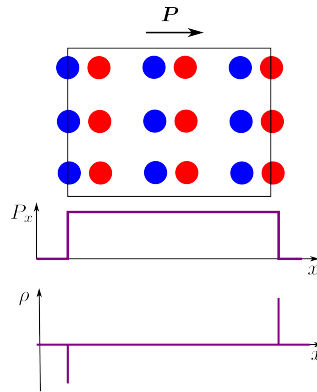


Рис. 7 Качественное изображения распределения зарядов в однородно поляризованном диэлектрике

из атомов размера a на расстоянии d , в каждом атоме положительный заряд “закреплен” на месте (имеет бесконечно большую массу), а отрицательный массы m может двигаться относительно него на “пружинке” жесткостью k , так что

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + q\mathbf{E}, \quad (\text{I.44})$$

где \mathbf{r} — смещение свободного заряда относительно неподвижного. В стационарном режиме

$$\mathbf{r} = \frac{q}{k}\mathbf{E} \quad (\text{I.45})$$

и дипольный момент атома

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r} = \alpha\mathbf{E}, \quad \alpha = \frac{q^2}{k} \text{ — поляризуемость атома.} \quad (\text{I.46})$$

Тогда средняя по пространству поляризация будет

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{d^3} = \chi\mathbf{E}, \quad \chi = \frac{q^2}{kd^3} \text{ — диэлектрическая восприимчивость среды.} \quad (\text{I.47})$$

Оценим величину χ . “Пружинка” имеет тоже электростатическую природу, поэтому ее жесткость можно оценить из условия баланса кулоновских сил, $ka = q^2/a^2$, где a — размер атома. Тогда $k \sim q^2/a^3$ и получаем оценку для поляризуемости $\alpha \sim a^3$. Это — универсальная оценка для поляризуемости в нерезонансном случае, применимая не только к атомам, но и к макроскопическим объектам с размером меньше длины волны света. Чем больше объект — тем больше его поляризуемость. Для восприимчивости получаем $\chi \sim (a/d)^3$. Поэтому в газах, где концентрация $n = 1/d^3$ мала, мала и поляризуемость.

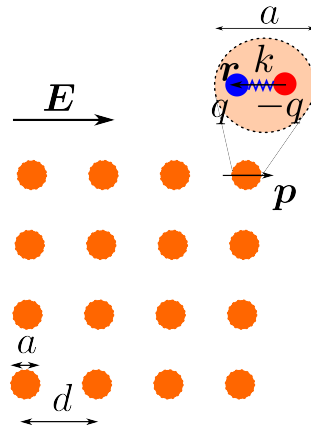


Рис. 8 Простейшая модель диэлектрика

В твердых телах $a \sim d$ и $\chi \sim 1$. Более честный расчет надо выполнять квантовомеханически, с учетом микроскопической структуры атомов и взаимодействия между ними. Отметим, что в ковалентных полупроводниках (Si, Ge, алмаз) поляризация происходит на самом деле не за счет поляризации одиночного атома, а за счет переходов электронов между соседними атомами. Т.е. модель на рис. 8 формально неприменима, она работает скорее для полярных диэлектриков (например, лёд). Однако оценка оказывается качественно верной и для ковалентных полупроводников. Например, для кремния $\chi \sim 0.9$, для алмаза $\chi \sim 0.4$. Для воды статическая восприимчивость порядка 6 (см. Zangwill, стр. 176, таблица 6.1, с учётом что $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$).

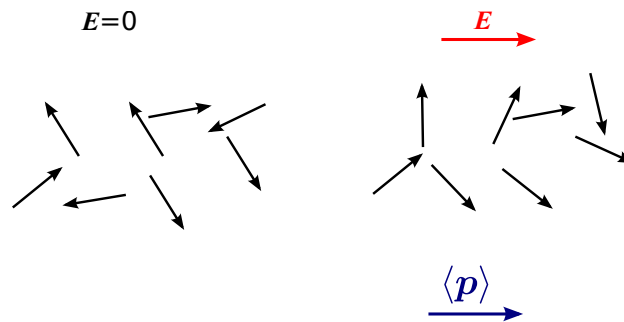


Рис. 9 Ориентация дипольных моментов внешним полем

Полезное энергетическое соображение: энергия на то, чтобы намагнитить электрический диполь \mathbf{p} постоянным полем равняется

$$U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{I.48})$$

Это очевидно из того, что в постоянном поле $q\varphi = -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.

Существует и ориентационный механизм диэлектрической поляризации, когда дипольный момент \mathbf{p} фиксирован по величине, но меняется по направлению, см. рис. 9. В этом случае восприимчивость будет зависеть от температуры и определяться средним от дипольного момента по углам,

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{p} e^{-\frac{U_E(\mathbf{p})}{T}} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{p} e^{\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}{T}} \approx \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{p} \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}{T} + \dots \right) = \alpha \mathbf{E} \quad (\text{I.49})$$

где

$$\alpha = \frac{p^2}{3T}. \quad (\text{I.50})$$

Из физических соображений и нашего вывода понятно, что $\chi > 0$ и $\varepsilon > 1$ (т.к. заряды наводят дипольный момент параллельный приложенному полю), так что $\chi \propto q^2$. Более строгое доказательство — Ландау и Лифшиц, §14. Далее правда будет показано, что это — не вся правда, т.к. вообще говоря χ — комплексная функция частоты. Утверждение про $\chi > 0$ и $\varepsilon > 1$ относится лишь к нулевой частоте, когда все величины — вещественны.

Отметим, что бывают еще сегнетоэлектрики (они же — ферроэлектрики), в которых есть спонтанная поляризация $\mathbf{P} \neq 0$ даже при нулевом внешнем поле $\mathbf{E} = 0$. В очень больших полях проявляются нелинейные слагаемые в зависимости $P(E)$, $P \propto E^2, E^3$ и т.д.

Вектор электрического поля удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_P + \rho_{\text{ext}}). \quad (\text{I.51})$$

С учетом того, что $\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ удобно ввести понятие вектора электромагнитной индукции

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \equiv (1 + 4\pi\chi)\mathbf{E} \equiv \varepsilon\mathbf{E}, \quad \varepsilon — \text{диэлектрическая проницаемость}. \quad (\text{I.52})$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ext}}. \quad (\text{I.53})$$

В отсутствии сторонних зарядов $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, откуда получаем граничное условие на равенство нормальных компонент \mathbf{D} на границе двух сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 ,

$$D_{n,1} = D_{n,2}, \text{ или } \varepsilon_1 E_{n,1} = \varepsilon_2 E_{n,2}. \quad (\text{I.54})$$

Отсюда видим, что поле не проникает в среду с большой диэлектрической проницаемостью, а экранируется. Отметим, что мы не учитывали этот эффект при выводе модельной формулы для восприимчивости кристалла.

Разберемся с электростатическим пределом, пусть опять $\omega \ll c/L$ и даже $\omega \ll c/(L\sqrt{\varepsilon})$. Тогда можно пренебречь образованием электромагнитных волн (см. наше рассмотрение плоских проводников) и рассмотреть экранировку электрического поля отдельно от магнитного.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi = -4\pi\rho_{\text{ext}}. \quad (\text{I.55})$$

Чтобы лучше почувствовать экранировку поля, решим две задачи.

Задача о поле в шаре

Рассмотрим однородный шар с проницаемостью ε радиуса R , помещенный в постоянное электрическое поле $\mathbf{E} \parallel z$, см. рис. 10. Чему будет равно поле внутри шара?

Решение 1 (см. например Zangwill, Example 6.3, p. 174). Пусть сфера помещена в постоянное электрическое поле E_0 , направленное вдоль оси z . Будем искать решение для потенциала в виде

$$\varphi = \begin{cases} -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{r^2}, & r > R \\ -E_{\text{in}} r \cos \theta, & r < R \end{cases} \quad (\text{I.56})$$

Здесь мы воспользовались видом частных решений уравнения Лапласа

$$\Delta[r^l P_l(\cos \theta)] = 0, \quad \Delta[r^{-l-1} P_l(\cos \theta)] = 0 \quad (\text{I.57})$$

и тем, что приложенное поле содержит лишь гармонику с $l = 1$, так что $P_1(\cos \theta) \equiv \cos \theta$. Физический смысл величины p — дипольный момент, наведенный в сфере. Физический смысл E_{in} — поле внутри сферы.

Граничные условия:

$$\varphi \Big|_{r=R-0} = \varphi \Big|_{r=R+0} \quad (\text{I.58})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R-0} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R+0}. \quad (\text{I.59})$$

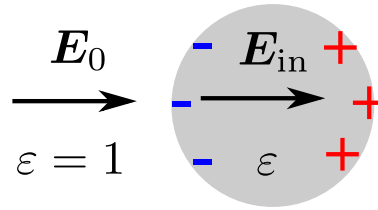


Рис. 10 Поляризация сферы внешним полем

$$E_0 R - \frac{p}{R^2} = E_{\text{in}} R \quad (\text{I.60})$$

$$E_0 + \frac{2p}{R^3} = \varepsilon E_{\text{in}} \quad (\text{I.61})$$

$$E_{\text{in}} = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2}, \quad \mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0, \quad \alpha = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3. \quad (\text{I.62})$$

α — поляризуемость шара. Вне шара будет

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2}{r^5}. \quad (\text{I.63})$$

Замечание: видно, что поле внутрь не проникает при $\varepsilon \gg 1$.

Замечание 2: поле внутри не зависит от координат — шар поляризован однородно. Это — уникальная особенность шаров и эллипсоидов (и заодно плоских слоёв, как частного случая).

Замечание 3: поле внутри не только постоянно, но еще и параллельно полю снаружи. Это — свойство шара. В эллипсоиде в общем случае, если поле снаружи не направлено вдоль главной оси, будет уже не так.

Вопрос: в знаменателе стоит $\varepsilon + 2$. Может ли быть $\varepsilon < 0$?

Ответ: Да, в металле, при $\omega \neq 0$.

интермедия — *Диэлектрик в нестационарном режиме*

В нестационарном режиме нужно учесть, что движение зарядов с плотностью ρ_P в диэлектрике приводит к локальным токам \mathbf{j} , при этом

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \rho_P = -\text{div } \mathbf{P}, \Rightarrow \text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{P}. \quad (\text{I.64})$$

Тогда получаем связь тока и поляризации:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_P + c \text{rot } \mathbf{M}, \quad \mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (\text{I.65})$$

где \mathbf{M} – произвольный вектор, описывающие вихревую часть тока ($\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{M} \equiv 0$). Его физический смысл мы поймем дальше, а пока просто скажем, что в диэлектриках нет вихревых токов и $\mathbf{M} \equiv 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_P$. Поэтому

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{I.66})$$

Таким образом, мы получили пару уравнений Максвелла для диэлектрика,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}} \quad (\text{I.67})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{I.68})$$

Свяжем проводимость и диэлектрическую проницаемость.

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \mathbf{j}(t) = \mathbf{j}e^{-i\omega t} + c.c., \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}e^{-i\omega t} + c.c., \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}e^{-i\omega t} + c.c., \quad (\text{I.69})$$

С другой стороны, в металле $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Отсюда

$$-i\omega \mathbf{P} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{P} = \frac{i\sigma}{\omega} \mathbf{E}, \quad (\text{I.70})$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i\sigma(\omega)}{\omega}. \quad (\text{I.71})$$

Таким образом, диэлектрическая проницаемость будет зависеть от частоты. Можно получить, что при $\omega \gg 1/\tau$ (в оптическом частотном диапазоне, $\omega \sim 10^{15}$ 1/s) будет $\sigma = e^2 n \tau / m (1 - i\omega\tau) = e^2 n i / m \omega$ (см. д/з №5) и

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{I.72})$$

(формула Друде для диэлектрической проницаемости металлов). Здесь $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n / m$ — плазменная частота. Параметры модели Друде для реальных металлов есть вот здесь: <http://www.wave-scattering.com/drudefit.html>. Как правило, модель Друде работает лишь в ИК области спектра, типичные значения $\hbar\omega_p \sim 10$ eV. В видимой области спектра для точного описания учитывать межзонные переходы. Экспериментальные значения диэлектрической проницаемости с учетом межзонных переходов удобно брать с сайта <https://refractiveindex.info>, см. также рис. 11(а). Из рисунка видно, что в видимой области спектра для металла может быть $\operatorname{Re} \varepsilon < 0$ (цвета на рисунке схематично обозначены радугой)

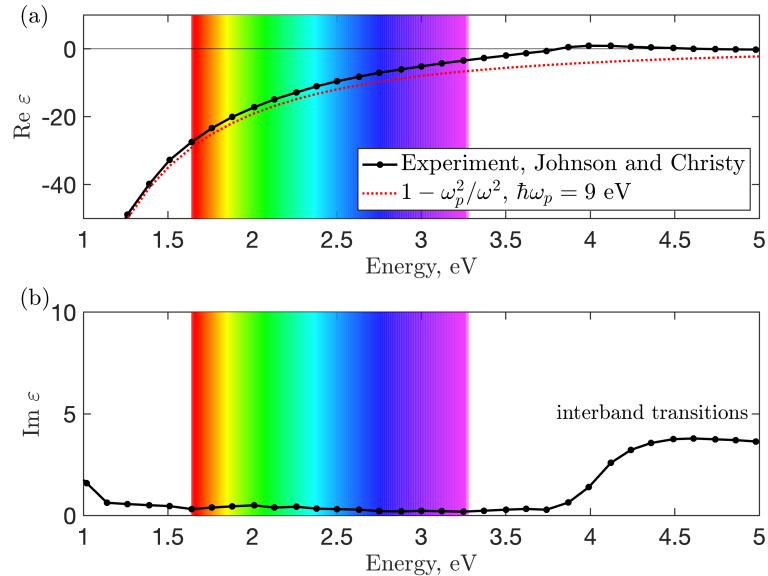


Рис. 11 Вещественная (a) и мнимая (b) части диэлектрической проницаемости золота взятые из работы [Johnson and Christy](#). Пунктиром на панели (a) показан расчет по формуле (I.72).

В частности, при $\omega = \omega_p/\sqrt{3}$ будет т.н. *плазмонный резонанс*, $\varepsilon = -2$. Он был прекрасно известен еще римлянам, и использовался в металлических красках. Природа резонанса была понята впервые ученым из Австро-Венгрии [Richard Adolf Zsigmondy](#) (Нобелевская премия по химии , 1925 года за химию коллоидных растворов).

Метод функций Грина

Затравка.

Давайте решим задачу о поле в полубесконечном диэлектрике с проницаемостью ε , занимающем полупространство $z < 0$,

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & z < 0 \\ \varepsilon, & z > 0 \end{cases} \quad (\text{I.73})$$

и помещенном в постоянное поле $\mathbf{E}_0 \parallel z$. Очевидно, из условий непрерывности $D_z = \varepsilon(z)E_z$, мы получим ответ

$$E_z(z) = \begin{cases} E_0, & z < 0 \\ E_0/\varepsilon, & z > 0. \end{cases} \quad (\text{I.74})$$



Рис. 12 Поляризация полупространства, заполненного диэлектриком, внешним полем

Однако, интересно получить этот ответ без использования граничных условий. Перепишем уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ как

$$\frac{\partial}{\partial z} E_z = -\frac{\partial}{\partial z} [[\varepsilon(z) - 1]E_z] \quad (\text{I.75})$$

и воспользуемся функцией Грина

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{sign}(z - z') = 2\delta(z - z') \quad (\text{I.76})$$

Физический смысл $\operatorname{sign}(z - z')$ в (I.76) — это постоянное электрическое поле снаружи от заряженной плоскости. Тогда (I.77) дает

$$E_z = E_0 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dz' \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{sign}(z - z') [\varepsilon(z') - 1] E(z') = \begin{cases} E_0, & z > 0 \\ E_0 - (\varepsilon - 1)E_z, & z < 0. \end{cases} \quad (\text{I.77})$$

Из второго уравнения мгновенно получаем $E_z = E_0/\varepsilon$ при $z > 0$. По сути, мы заменили диэлектрик на набор поляризованных слоев, см. рис. 12(b).

Теперь, когда мы освоили метод функций Грина для простой задачи, попробуем получить тот же самый ответ (I.62) для поляризуемости сферы методом функций Грина, без использования граничных условий.

$$\operatorname{div} \varepsilon(r) \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad \varepsilon(r) = 1 + (\varepsilon - 1)H(R - r), \quad (\text{I.78})$$

где $H(r)$ — ступенчатая функция Хевисайда, $H(x) = 1$ при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. Будем рассматривать вклад с поляризуемостью сферы, $\propto (\varepsilon - 1)$, как возмущение:

$$\Delta \varphi = -(\varepsilon - 1) \operatorname{div} H(R - r) \operatorname{grad} \varphi \equiv (\varepsilon - 1) \operatorname{div} H(R - r) \mathbf{E}. \quad (\text{I.79})$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = -E_0 z - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{div} H(R - r') \mathbf{E}(\mathbf{r}') = -E_0 z + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int_{r' < R} d^3 r' \mathbf{E} \cdot \nabla_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{I.80})$$

Возьмем производную от этого уравнения и перейдем от потенциала к полю:

$$E_\mu = E_0 \delta_{\mu,z} - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_{r' < R} d^3 r' E_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = E_0 \delta_{\mu,z} + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int_{r' < R} d^3 r' E_\nu \frac{\partial^2}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{I.81})$$

В уравнении (I.81) положим $\mathbf{r} = 0$ и пренебрежем зависимостью поля от координаты внутри сферы, $\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}(0) \equiv \mathbf{E}_{\text{in}}$. Для сферы и эллипсоида это – точный результат, поле внутри не зависит от координаты. Иначе – это приближение, фактически – дипольное приближение, когда поле внутри считается однородным.

Тогда для поля внутри сферы получаем уравнение

$$E_{\text{in},\mu} = E_0 \delta_{\mu,z} - (\varepsilon - 1) L_{\mu\nu} E_{\text{in},\nu}. \quad (\text{I.82})$$

Здесь введен *тензор коэффициентов деполаризации* $L_{\mu\nu}$, равный

$$L_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \int_{r' < R} d^3 r' \frac{\partial^2}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} \frac{1}{r'}. \quad (\text{I.83})$$

В общем случае интегрирование идет по внутренности тела, не обязательно сферы. След тензора единичен

$$L_{\mu\mu} = -\frac{1}{4\pi} \int_{r' < R} d^3 r' \Delta \frac{1}{r'} = \int_{r' < R} d^3 r' \delta(\mathbf{r}') = 1. \quad (\text{I.84})$$

Тогда по симметрии для сферы $L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}/3$ и поле внутри сферы

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{1}{1 + (\varepsilon - 1)\hat{L}} \mathbf{E}_0 = \frac{1}{1 + (\varepsilon - 1)/3} \mathbf{E}_0 = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon + 2} \quad (\text{I.85})$$

в согласии с (I.62).

В дальнейшем поле находим из (I.81)

$$E_\mu = E_0 \delta_{\mu,z} + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} V \frac{3x_\mu x_\nu - r^2 \delta_{\mu\nu}}{r^5} E_{\text{in},\mu}, \quad (\text{I.86})$$

т.е. поле диполя с дипольным моментом

$$\mathbf{p} = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi} V \mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi} V \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \mathbf{E}_0 \quad (\text{I.87})$$

также в согласии с (I.62).

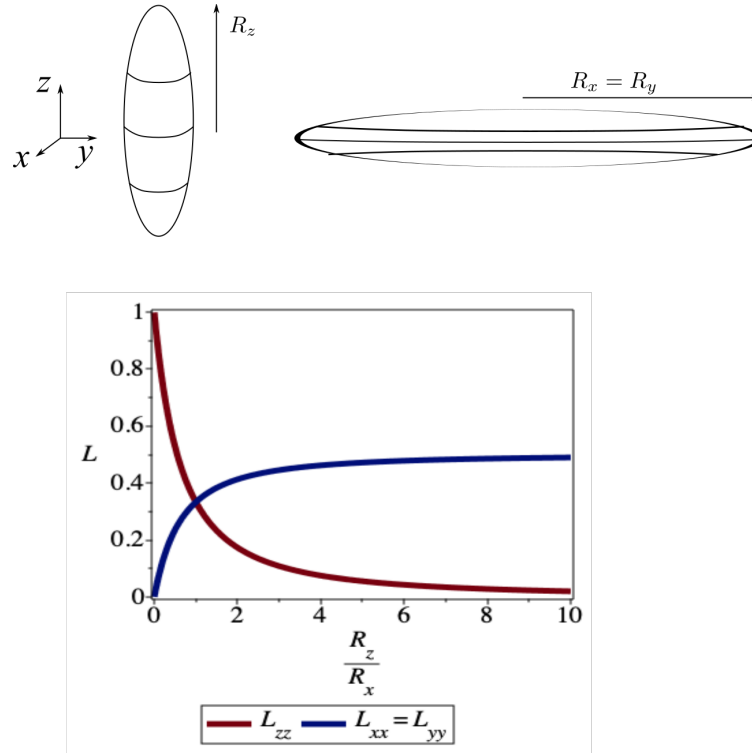


Рис. 13 Вытянутый и сплюснутый эллипсоиды и зависимость коэффициентов деполяризации от соотношения длин полуосей эллипсоида

В частном случае коэффициенты деполяризации легко написать для очень вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения, см. рис. 13,

$$\frac{x^2 + y^2}{R_x^2} + \frac{z^2}{R_z^2} \leq 1. \quad (\text{I.88})$$

(а) вытянутый эллипсоид. $R_x \ll R_z$. $L_{zz} \ll 1$, $L_{xx} = L_{yy} \approx 1/2$. Здесь мы воспользовались тем, что $L_{zz} \ll 1$ поскольку вблизи плоской поверхности сохраняется тангенциальная компонента поля.

(б) сплюснутый эллипсоид. $R_x \gg R_z$. $L_{zz} \approx 1$, $L_{xx} = L_{yy} \ll 1$.

Здесь мы наоборот знаем, что $E_{in,z} = E_{0,z}/\varepsilon$ (т.к. на поверхности непрерывна D_z), что, в согласии с (I.85), требует $L_{zz} = 1$.

Задачу для зависимости L_{zz} от соотношения полуосей можно точно решить (см. например формулы 4.32-4.35 в Ландау и Лифшице, т.8). Тогда оказывается, что L_{zz} монотонно изменяется от 0 до 1 при переходе от вытянутого эллипсоида к сплюснутому.

Случай вытянутого эллипсоида с $L_{zz} \ll 1$ особенно интересен. Поляризуемость имеет

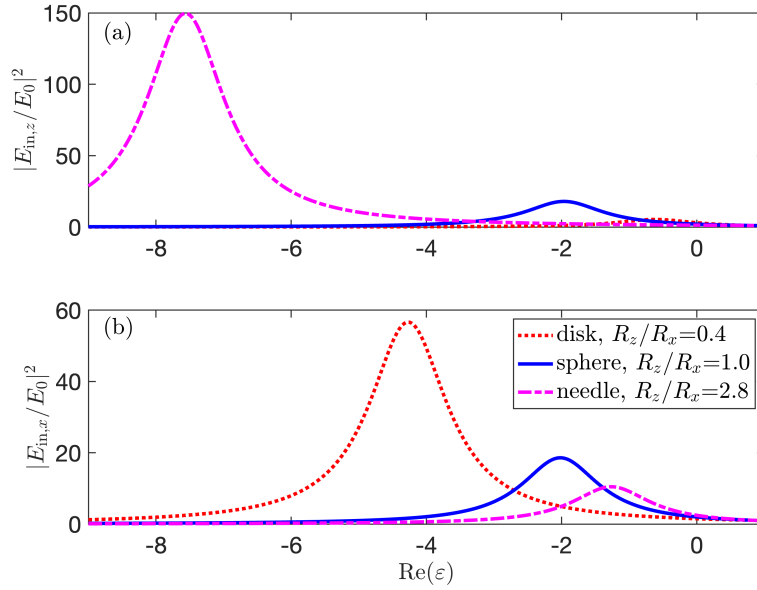


Рис. 14 Спектр усиления локального поля в эллипсоиде с $R_x = R_y$ в зависимости от соотношения R_z/R_x . Расчет выполнен по формуле (I.85) с постоянным $\text{Im } \varepsilon = 0.5$

вид

$$\alpha_{zz} = \frac{V}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)L_{zz}} \quad (\text{I.89})$$

т.е. резонанс при $\varepsilon = 1 - 1/L_{zz} \approx -1/L_{zz}$. На самом деле всегда есть потери на омический нагрев в металле. Из-за рассеяния электронов $\omega\tau$ не бесконечно, поэтому $\text{Re } \sigma \neq 0$ и $\text{Im } \varepsilon \neq 0$. Пусть $\varepsilon \approx -1/L_{zz} + i \text{Im } \varepsilon$. В резонансе

$$\alpha_{zz} = \frac{V}{4\pi} \frac{i}{L_{zz}^2 \text{Im } \varepsilon}. \quad (\text{I.90})$$

Тогда (а) чем меньше потери, тем больше резонансное значение поляризуемости и (б) чем более вытянутый эллипсоид, тем меньше L_{zz} и тем больше значение поляризуемости. Спектры усиления локального поля в зависимости от соотношения R_x/R_z показаны на рис 14. В согласии с (I.90), наибольшее поле достигается, если приложить внешнее поле вдоль оси иглы (красная пунктирная кривая на панели (а)).

Усиление поля вблизи острий – известный эффект, например — огни святого Эльма на мачтах кораблей. Более подробно — см. [В.В. Климов, “Наноплазмоника” (М., Физматлит, 2009), параграф 7.2.1].

Задача о поле над плоскостью

Заряд q помещен в воздух на высоте h над бесконечной плоскостью, т.е. $\varepsilon(z) = 1$ при $z > 0$ и $\varepsilon(z) = \varepsilon$ при $z < 0$, см. рис. 15. Найти потенциал во всем пространстве.

$$\Delta\varphi = -4\pi q\delta(x)\delta(y)\delta(z-h), \quad (\text{I.91})$$

$$\Delta\varphi = 0, \quad z < 0 \quad (\text{I.92})$$

$$\varphi|_{z=-0} = \varphi|_{z=+0} \quad (\text{I.93})$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \varphi|_{z=-0} = \frac{\partial}{\partial z} \varphi|_{z=+0} \quad (\text{I.94})$$

$$\varphi(\rho, z) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\rho} \varphi_{\mathbf{k}}(z). \quad (\text{I.95})$$

Тогда

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \varphi_{\mathbf{k}} = -4\pi q\delta(z-h), \quad z > 0 \quad (\text{I.96})$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \varphi_{\mathbf{k}} = 0, \quad z < 0 \quad (\text{I.97})$$

$$\varphi|_{\mathbf{k}, z=-0} = \varphi|_{\mathbf{k}, z=+0}, \quad (\text{I.98})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{\mathbf{k}, z=-0} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{\mathbf{k}, z=+0} \quad (\text{I.99})$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi_{\mathbf{k}}(z) = 0 \quad (\text{I.100})$$

Тогда

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \varphi_{0,\mathbf{k}} + \varphi_{R,\mathbf{k}}, & z > 0 \\ \varphi_{T,\mathbf{k}}, & z < 0 \end{cases} \quad (\text{I.101})$$

где

$$\varphi_{0,\mathbf{k}} = \frac{2\pi q}{k} e^{-k|z-h|} \quad (\text{I.102})$$

— решение в бесконечной среде (можно проверить, что оно удовлетворяет (I.96)), а φ_R , φ_T — вклад границы. Из соображений затуханий потенциала вдали от границы ищем $\varphi_R = Ae^{kz}$, $\varphi_T = Be^{-kz}$. Граничные условия:

$$\frac{2\pi q}{k} e^{-kh} + A = B, \quad \frac{2\pi q}{k} e^{-kh} - A = \varepsilon B \quad (\text{I.103})$$

откуда

$$A = \frac{2\pi q}{k} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} e^{-kh}, \quad B = \frac{2\pi q}{k} \frac{2}{\varepsilon+1} e^{-kh}. \quad (\text{I.104})$$

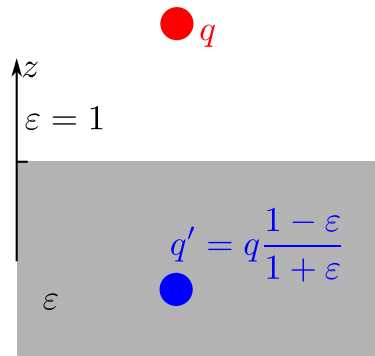


Рис. 15 Заряд над диэлектрической плоскостью и соответствующий ему заряд изображения

Обратно потенциал собирается легко, т.к. интегралы с φ_0 , A и B имеют один и тот же вид и сводятся к потенциалу точечного заряда. Поэтому

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}, z) = \begin{cases} \frac{q}{r} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{q}{\sqrt{(z+h)^2 + \rho^2}}, & z > 0 \\ \frac{2}{\varepsilon+1} \frac{q}{\sqrt{(z-h)^2 + \rho^2}}, & z < 0. \end{cases} \quad (\text{I.105})$$

Ответ можно сравнить с задачей 1 к параграфу 7 главы 2 в Ландау и Лифшице, т. 8. Видно, что задачу можно было бы решать методом изображений, поставив дополнительный фиктивный заряд в зеркальную точку под поверхностью с $z = -h$. Это особенно очевидно в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$, когда на поверхности постоянный потенциал $\varphi = 0$. Однако предложенный способ решения значительно более общий и работает для любых слоистых систем. Еще замечание: условие $\varepsilon = -1$ соответствует *поверхностному плазмонному резонансу* с

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \quad (\text{I.106})$$

Для сферы у нас в предыдущей задаче было $\varepsilon = -2$ и $\omega = \omega_p/\sqrt{3}$.

Метод конформных отображений

“Плоские” задачи двумерной электростатики можно сводить к “круглым” и наоборот. Для аналитической функции комплексного аргумента

$$g(z) \equiv g(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (\text{I.107})$$

выполняются условия Коши-Римана,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{I.108})$$

Отсюда следует, что и φ и ψ удовлетворяют 2D уравнению Пуассона, $\Delta \varphi = \Delta \psi = 0$. Поэтому любая вещественная (или мнимая) часть аналитической функции удовлетворяют уравнению Пуассона. Более того, если сделать замену переменных,

$$z = x + iy \rightarrow f(z) = x' + iy' \quad (\text{I.109})$$

где f — аналитическая функция, то результат тоже будет удовлетворять уравнению Пуассона. Т.е. если

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{I.110})$$

то и

$$\frac{\partial^2 \varphi'(x', y')}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'(x', y')}{\partial y'^2} = 0, \quad (\text{I.111})$$

где $\varphi' \equiv \varphi[\text{Re } f(x + iy), \text{Im } f(x + iy)]$.

Что будет с граничными условиями? Условие непрерывности потенциала φ на границе областей с разным ε никуда не денется, т.к. преобразованный потенциал тоже будет непрерывен. Условие

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (\text{I.112})$$

тоже сохранится. Это следует из того, что конформное преобразование $(x, y) \rightarrow (u, v)$ сохраняет углы, т.к. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Поэтому нормаль к границе в повернутой системе координат останется нормалью и в исходной, а значит, сохранится и соотношение между производными по нормали.

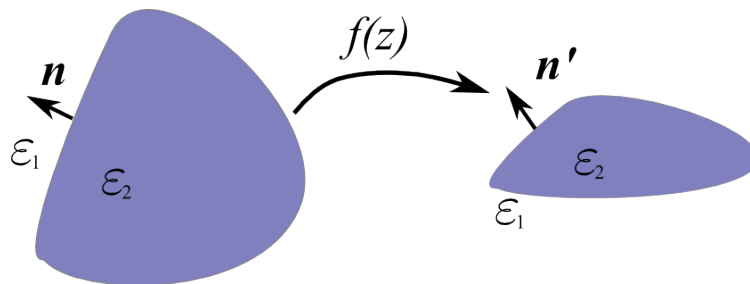


Рис. 16 Конформное отображение

Во что перейдут заряды? Рассмотрим два провода с линейной плотностью заряда q в точках $x = \pm a/2, y = 0$. В исходных координатах они соответствует полю и потенциалу

$$\mathbf{E}_{\pm} = \pm 2q \frac{\mathbf{r} \mp \frac{a}{2} \mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} \mp \frac{a}{2} \mathbf{e}_x|^2}, \quad \varphi = \mp 2q \ln |\mathbf{r} \mp \frac{a}{2} \mathbf{e}_x|, \quad (\text{I.113})$$

что можно получить из теоремы Гаусса. Рассмотрим преобразование

$$z' = R^2/z. \quad (\text{I.114})$$

Для простоты пусть $y = y' = 0$, а $x' = R^2/x > 0$. Тогда

$$\varphi = -2q(\ln |a/2 - R^2/x'| - \ln |R^2/x' + a/2|), \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{4qR^2}{x'(2R^2 - ax')} - \frac{4qR^2}{x'(2R^2 + ax')} \quad (\text{I.115})$$

Мы заинтересованы в области $x' \ll R, a$. В этом случае

$$E_x \approx \frac{2qa}{R^2}. \quad (\text{I.116})$$

То есть поле двух противоположно заряженных тонких проводов (двумерного аналога диполя) в преобразованных координатах эквивалентно постоянному электрическому полю.

Отметим, что при дробно-линейном преобразовании (I.114) цилиндр с центром в точке $x = R, y = 0$ радиуса R переходит в полупространство $x' > R/2$. Действительно, граница цилиндра соответствует уравнению

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2, \quad (\text{I.117})$$

что с учетом $x = R^2 x' / (x'^2 + y'^2)$, $y = R^2 y' / (x'^2 + y'^2)$ переходит в $x' = R/2$.

Поэтому вместо задачи о двух цилиндрах в постоянном электрическом поле можно решать эквивалентную задачу о двух полупространствах с диполем посередине, см. рис. 17. Такую задачу мы решать уже умеем, см. предыдущий раздел.

Далее см. д/з 6. Более подробно и в более общем случае: [свежий обзор по трансформационной оптике и шапкам-невидимкам](#).

D. Парамагнетики и диамагнетики

Понятие намагниченности

Литература: Ландау и Лифшиц, глава 4, параграф 29. Ранее мы писали в (I.65), что

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M. \quad (\text{I.118})$$

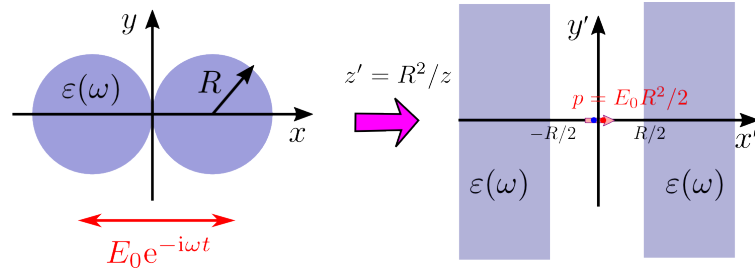


Рис. 17 Конформное отображение “целующихся цилиндров” в диполь между полупространствами

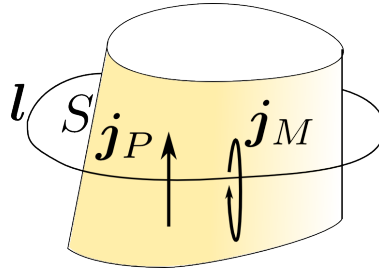


Рис. 18 Область интегрирования в (I.119) и схема линий токов.

Первое слагаемое соответствовало, в частности, омическому току. Изучим теперь вклад, связанный с намагниченностью \mathbf{M} , причем пусть \mathbf{M} снаружи объекта равно нулю. Его особенность в том, в отличие от первого вклада, что поток через полное поперечное сечение тела будет 0,

$$\int d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{M} = \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (\text{I.119})$$

Здесь интеграл идет по поверхности, которая охватывает тело, не касаясь его, см. рис. 18: Проясним теперь физический смысл \mathbf{M} и свяжем его с магнитным моментом токов \mathbf{j}_M :

$$\begin{aligned} m_x &\equiv \frac{1}{2c} \int dV [\mathbf{r} \times \mathbf{j}_M]_x = \frac{1}{2} \int dV [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})]_x = \frac{1}{2} \int dV \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) M_x \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} - (\nabla \cdot \mathbf{r}) M_x + M_x (\nabla \cdot \mathbf{r}) \right] = \\ &= 0 - \frac{1}{2} \int dV M_x + \frac{3}{2} \int dV M_x = \int dV M_x. \quad (\text{I.120}) \end{aligned}$$

Поэтому физический смысл \mathbf{M} — плотность магнитного момента.

Среднее микроскопическое поле $\mathbf{H}_{\text{micro}}$ принято называть \mathbf{B} (магнитной индукцией).

Так сложилось исторически. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.121})$$

и

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}, \quad (\text{I.122})$$

где для общности дописали внешние токи \mathbf{j}_{ext} . Полагая

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \quad (\text{I.123})$$

(это можно рассматривать как определение \mathbf{H} , по аналогии с определением $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$), находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{I.124})$$

Итак, мы получили полную систему уравнений Максвелла в среде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}} \quad (\text{I.125})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.126})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.127})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.128})$$

В следующей главе мы начнём их решать, а пока разберемся со связью $\mathbf{M}(\mathbf{H})$. Важно помнить, что среднее микроскопическое поле в среде — это именно \mathbf{B} , а не \mathbf{H} . Поэтому если в среду поместить внешний заряд, то в силу Лоренца будет входить поле \mathbf{B} (а не \mathbf{H}), а вот в электростатическую силу — \mathbf{E} (а не \mathbf{D}); $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$.

Граничные условия на границе сред 1 и 2: непрерывность нормальных

$$D_{n,1} = D_{n,2}, \quad B_{n,1} = B_{n,2} \quad (\text{I.129})$$

и тангенциальных компонент,

$$H_{t,1} = H_{t,2}, \quad E_{t,1} = E_{t,2}. \quad (\text{I.130})$$

Парамагнитный и диамагнитный отклик.

Литература: Ч. Киттель, “Введение в физику твёрдого тела”, глава 15; Van Vleck, Theory of electric and magnetic susceptibilities, (Clarendon press, 1932), §25.; Ландау и Лифшиц, т.5, §52.

В ферромагнетиках бывает $\mathbf{M} \neq 0$ даже в отсутствии внешнего поля \mathbf{B} . В остальных случаях можно разложить намагниченность в ряд по степеням \mathbf{B} (или \mathbf{H}), так что

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \dots, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} + \dots, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m \quad (\text{I.131})$$

и введены магнитные проницаемость μ и восприимчивость χ_m . При низкой концентрации атомов n можно считать, что $\chi_m = n\alpha_m$ (аналогично соотношению $\chi = n\alpha$ для диэлектриков), так что достаточно изучить отклик одиночного магнитного момента на приложенное магнитное поле, $\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{H}$.

Магнитостатика

Будем считать, что частоты достаточно низкие и током смещения $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ можно пренебречь.

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.132})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.133})$$

Поэтому

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{I.134})$$

и

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.135})$$

В однородном пространстве считаем, что выбрана калибровка $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, тогда

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.136})$$

Это очень похоже на уравнение Пуассона для электрического потенциала, $\Delta\varphi = -4\pi\rho_{\text{ext}}/\varepsilon$, с той лишь разницей, что μ теперь – в числителе.

Оказывается, что в отличие от диэлектриков, где $\chi_e > 0$, магнитная восприимчивость бывает любого знака.

(1) в парамагнетиках $\chi_m^{(\text{para})} > 0$. Проще всего получить выражение для парамагнитной восприимчивости по аналогии с (I.50), считая что среда представляет собой совокупность случайно ориентируемых магнитных моментов. Тогда получим

$$\alpha_m^{(\text{para})} = \frac{m^2}{3T}, \quad (\text{I.137})$$

(парамагнетизм Ланжевена).

Полезное энергетическое соображение (см. Zangwill, 13.7.1).

Мощность на то, чтобы намагнитить контур плотностью тока \mathbf{j}_M равна

$$\begin{aligned} \int dV \mathbf{j}_M \cdot \mathbf{E} &= c \int dV \operatorname{rot} \mathbf{M} \cdot \mathbf{E} = c \int dV (\operatorname{div}(\mathbf{M} \times \mathbf{E}) + \mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}) \\ &= - \int \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (\text{I.138})$$

Откуда берется энергия, если сила Лоренца работы не совершает? Ответ — работу совершает электрическое поле, возникающее при изменении магнитного. Поэтому если магнитное поле не зависит от координат на масштабах системы токов, то можно ввести энергию взаимодействия магнитного момента $\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV$ с магнитным полем

$$U_M = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{I.139})$$

(ср. с (I.48) для электрического дипольного момента).

(2) в диамагнетиках $\chi_m^{(\text{dia})} < 0$.

Для вывода диамагнитного отклика рассмотрим электрон с зарядом q во внешнем слабом магнитном поле \mathbf{H} и потенциале U .

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{Mv^2}{2} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - U(r), \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}. \quad (\text{I.140})$$

В этом разделе массу будем обозначать большой буквой M , чтобы не путать с магнитным моментом. Перейдем во вращающуюся с частотой Ω систему отсчета, так что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (\text{I.141})$$

Тогда

$$L = \frac{Mv'^2}{2} + M(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}' + \frac{q}{2c} (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}' - U(r) + \dots, \quad (\text{I.142})$$

где мы не учитывали квадратичных слагаемых. Тогда видно, что при

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{q\mathbf{H}}{2Mc} \quad (\text{I.143})$$

во вращающейся системе магнитное поле пропадет. Считая, что без магнитного поля углового момента в среднем нет, получаем, что во вращающейся системе его не будет.

А значит, в исходной системе появится угловой и магнитный момент,

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = -\frac{q^2}{4Mc^2} \mathbf{r} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4Mc^2} [\mathbf{H}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r})]. \quad (\text{I.144})$$

Момент направлен против приложенного поля. Для движения по прямой этот эффект легко понять как следствие силы Лоренца, см. рис. 19. Сила Лоренца закручивает заряды так, что магнитный момент направлен противоположно приложенному магнитному полю.

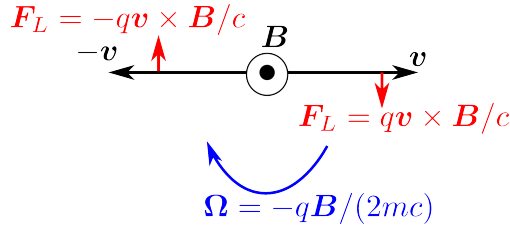


Рис. 19 Иллюстрация возникновения диамагнетизма ($q > 0$).

Считая систему изотропной, получаем

$$\mathbf{m} = \alpha_m^{(\text{dia})} \mathbf{H}, \quad \alpha_m^{(\text{dia})} = -\frac{q^2}{6Mc^2} \langle r^2 \rangle. \quad (\text{I.145})$$

Сравнивая с оценкой (I.46) для диэлектрической восприимчивости видно, что магнитная – релятивистски слабый эффект, по параметру $(v/c)^2$. На оптических частотах в твердом теле имеем

$$|\chi^{(\text{dia})}| = n \frac{e^2 r^2}{6Mc^2} \sim \frac{1}{r^3} \frac{e^2 r^2}{6Mc^2} \sim \frac{e^2}{Mrc^2} \sim \frac{v^2}{c^2} \sim \frac{1}{137^2} \sim 10^{-4}. \quad (\text{I.146})$$

Левитация диамагнетиков в магнитном поле

Посчитаем силу, действующую на магнитный момент в поле \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = -\nabla(-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{m} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\alpha_m}{2} \nabla B^2. \quad (\text{I.147})$$

При этом мы помним, что магнитная поляризуемость мала по сравнению с электрической,

$$\alpha_m \sim \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \alpha_e \sim \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 r_{\text{at}}^3 \sim \frac{r_{\text{at}}^3}{137^2}. \quad (\text{I.148})$$

Сравним магнитную силу с Mg по порядку величины:

$$\frac{\alpha_m \nabla B^2}{Mg} \sim \frac{r_{\text{at}}^3}{10^4 Mg} \nabla B^2 \sim \frac{10^{-24} \text{ cm}^3}{10^4 \times 10^{-23} \text{ g} \times 1000 \text{ cm/s}^2} \nabla B^2 \sim 10^{-8} \frac{\text{cm}}{\text{G}^2} \nabla B^2 \sim \frac{\text{cm}}{\text{T}^2} \nabla B^2. \quad (\text{I.149})$$

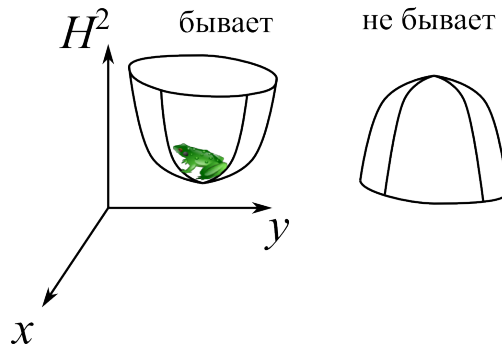


Рис. 20 Иллюстрация к теореме Эрншоу.

На самом деле α_m чуть меньше, более точная оценка дает порядка 10^{-1} см/Т². Тем не менее, при B порядка 10 Т, меняющемся на размерах порядка 10 см у нас магнитная сила уравновесит гравитацию \Rightarrow левитация.

Увлекательная [заметка с видео](#) и [статья](#) (А. Geim, “*Everyone’s Magnetism*” Physics Today, 36-39 (1998)) про левитацию.

Отметим, что для парамагнетиков стабильной левитации не может быть по теореме Эрншоу. Т.к. $\text{div } \mathbf{B} = 0$ то $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и из $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ следует $\Delta \mathbf{A} = 0$ и $\Delta \mathbf{B} = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\alpha_m \Delta B^2 = -\alpha_m \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} B_\nu^2 = -2\alpha_m B_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} B_\nu - 2\alpha_m \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} B_\nu \right)^2 = \\ &= -2\alpha_m \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{B} - 2\alpha_m [(\text{grad } B_x)^2 + (\text{grad } B_y)^2 + (\text{grad } B_z)^2] \\ &= -2\alpha_m [(\text{grad } B_x)^2 + (\text{grad } B_y)^2 + (\text{grad } B_z)^2]. \quad (\text{I.150}) \end{aligned}$$

В парамагнетиках при $\alpha_m > 0$ имеем $\Delta U < 0$. Поэтому не может быть стабильных минимумов потенциала, в которых должно быть $U_{xx} > 0, U_{zz} > 0, U_{yy} > 0$. Иными словами, не бывает максимумов H^2 но бывают минимумы, см рис. 20.

То же самое утверждение запрещает левитацию диэлектриков в вакууме (с $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$) при $\omega = 0$ (т.к. $\alpha > 0$). На конечной частоте ограничения нет, поскольку $\Delta \mathbf{E} \neq 0$. Так работает т.н. оптический пинцет [Нобелевская премия по физике 2018], см. рис. 21 и [А. Ashkin, “Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure“, Phys. Rev. Lett. **24**, 156-159 (1970), [статья](#)], [А. Ashkin and J. P. Gordon, *Stability of radiation-pressure particle traps: an optical Earnshaw theorem*, Optics Letters 8, 511-513 (1983), [статья](#)].

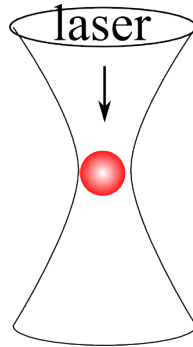


Рис. 21 Иллюстрация оптического пинцета — захват частицы в фокусе лазерного пучка.

Оценим оптические силы:

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -\alpha E^2, \quad F = -\nabla U, \quad (\text{I.151})$$

Пусть лазер с мощностью пучка $1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg/s}$ сфокусирован в пятно размером порядка $R \sim 1 \text{ }\mu\text{m}$. Электрическое поле можно оценить из условия, что плотность потока энергии $cE^2/4\pi$ равняется W/R^2 , а поляризуемость частицы порядка R^3 , см. (I.62). Тогда

$$F \sim \alpha \nabla E^2 \sim R^3 \frac{1}{R} E^2 \sim R^3 \frac{1}{R} \frac{1}{c} \frac{W}{R^2} \sim \frac{W}{c}. \quad (\text{I.152})$$

Формула имеет очень прозрачный смысл — сила связана с давлением света и пропорциональна мощности пучка. Полная энергия пучка фотонов в единицу времени $W = c\Delta p/\Delta t$, т.е. энергия $E = cp$, где p — полный импульс. Поэтому $W/c = \frac{\delta p}{\delta t}$ — как раз полный импульс в единицу времени, передаваемый пучком частице. Итого получаем

$$F \sim \frac{W}{c} \sim \frac{10^7 \text{ erg}}{\text{s}} \frac{1}{3 \times 10^{10} \text{ cm/s}} \sim 10^{-3} \text{ дин}. \quad (\text{I.153})$$

С другой стороны, для частицы объема $1 \text{ }\mu\text{m}^3 = 10^{-12} \text{ cm}^3$ и плотностью 1 g/cm^3 имеем $mg \sim 10^{-9} \text{ дин}$. Таким образом, оценка для силы давления света получилась на шесть порядков выше, чем сила гравитации. Поэтому оптический пинцет работает, и для микрочастиц, и даже для отдельных атомов (Нобелевская премия по физике 1997 года).

Теорема Бора-ван-Лёвен

Проблема в том, что магнетизм — эффект сугубо квантовый. В классической физике вклады (I.145) и (I.137) в точности взаимно уничтожаются (теорема Бора-ван Лёвен).

Диэлектрические свойства	Магнитные свойства
$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ $\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ $U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$ $\mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ $U_M = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$
ферроэлектрики ($\mathbf{P} \neq 0$ при $\mathbf{E} = 0$)	ферромагнетики ($\mathbf{M} \neq 0$ при $\mathbf{B} = 0$)
диэлектрики ($\varepsilon > 1$)	парамагнетики ($\mu > 1$)
$\alpha = \frac{p^2}{3T}$	$\alpha_m = \frac{m^2}{3T}$
—	диамагнетики ($0 < \mu < 1$)
$\alpha = \frac{q^2}{k} \sim r_{at}^3 > 0$	$\alpha_m = -\frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{6Mc^2} \sim r_{at}^3 \frac{v^2}{c^2} < 0$
	сверхпроводники ($\mu = 0$)

Таблица I Диэлектрические и магнитные свойства.

Продemonстрируем это для молекулы, в которой электрон двигается по сфере на фиксированном расстоянии r от центра по кругу с постоянной угловой скоростью Ω . Тогда магнитный момент

$$m = \frac{e}{2c} r^2 \Omega \quad (\text{I.154})$$

где Ω – частота вращения, и

$$m^2 = \frac{e^2 r^2}{2Mc^2} \frac{Mr^2 \Omega^2}{2}, \quad \langle m^2 \rangle = \frac{e^2 r^2}{2Mc^2} (T/2 + T/2) = \frac{e^2 r^2}{2Mc^2} T, \quad \frac{\langle m^2 \rangle}{3T} = \frac{e^2 r^2}{6Mc^2}, \quad (\text{I.155})$$

что в точности компенсирует диамагнитный вклад (I.145). Здесь мы учли, что в системе две степени свободы и на каждую степень свободы приходится по энергии $T/2$.

В общем случае нужна квантовая механика. Например, для газа свободных электронов парамагнитный вклад (Паули) в 3 раза больше диамагнитного (Ландау).

Еще бывают *сверхпроводники*, которые можно формально описывать как вещества с $\mu = 0$ (т.е. $\mathbf{B} = 0$). В этом смысле они похожи на идеальные проводники, магнитное поле в них тоже не проникает на макроскопических масштабах. Технически сверхпроводники можно эквивалентно описывать и положив $\tau = \infty$ в формуле Друде, т.е. $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$. Тогда окажется, что поле проникает на глубину “скин-слоя” порядка $c/\omega_p \sim 10$ нм.

В заключение, в таблице I приведены сходства и различия между электрическими и магнитными свойствами веществ.

Физический смысл μ . Литература — Ландау и Лифшиц, т. 8 §79 и, более подробно, В. М. Агранович и Ю. Н. Гартштейн, “Пространственная дисперсия и отрицательное

преломление света”, УФН **176**, 1051-1068 (2006), <https://ufn.ru/ru/articles/2006/10/c/>, раздел 5.

Разбиение тока на вклады \mathbf{j}_P и \mathbf{j}_M вообще говоря неоднозначно, а значит, неоднозначен и выбор ε и μ .

Физический смысл \mathbf{M} понятен на малых частотах, когда $j_P \ll j_M$, см. (I.118).

Если размер тела l , то

$$\mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M} \sim \frac{c}{l} \chi_m H, \quad \mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \sim \omega P \sim \omega E \sim \frac{\omega^2 l}{c} H, \quad (\text{I.156})$$

так что

$$\frac{j_P}{j_M} \sim \frac{\omega^2 l^2}{c^2 \chi_m} \ll 1. \quad (\text{I.157})$$

Поскольку из $\chi_m \sim \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ (см. (I.146)), то

$$\frac{j_P}{j_M} \sim \frac{\omega^2 l^2}{v^2}. \quad (\text{I.158})$$

Поскольку $\omega \sim v/a$, где a — атомные размеры, то

$$\frac{j_P}{j_M} \sim \frac{l^2}{a^2}, \quad (\text{I.159})$$

а значит, для макроскопических $l \gg a$ условие $j_P/j_M \ll 1$ невыполнимо.

В последние годы говорят про *искусственные* среды, т.н. *метаматериалы*, которые характеризуются *эффективными* диэлектрическими и магнитными проницаемостями. В отличие от обычных веществ, состоящих из атомов, они состоят из искусственных блоков, т.н. *метаатомов*. Например, массивы кремниевых шариков с диаметром порядка 100 нм. Такие вещества оказывается удобно характеризовать эффективной магнитной проницаемостью, в которой на оптических частотах бывают резонансы. В резонансах магнито-дипольного типа магнитный отклик оказывается значительно больше электрического, см. например [Arseniy I. Kuznetsov et al., “Magnetic light”, Scientific Reports **2**, 492 (2012), <https://www.nature.com/articles/srep00492>]. Поэтому удобно говорить именно об эффективной магнитной проницаемости на больших частотах. В этом случае (I.159) можно переписать как

$$\frac{j_P}{j_M} \sim \frac{\omega^2 l^2}{c^2 \chi_m} \sim \frac{l^2}{\lambda^2 \chi_m}, \quad (\text{I.160})$$

где теперь l — характерный размер частиц, из которых составлен метаматериал (радиус шариков), а λ — длина волны света. Поэтому в пределе $l \gg \lambda$ такое приближение оказывается применимо. Однако, на оптических частотах оказывается, что все величины

одного порядка, т.е. $l \sim \lambda \sim 1 \mu\text{m}$. Поэтому область применимости все равно ограничена и к утверждениям о магнитных метаматериалах нужно подходить осторожно.

II. Электромагнитные волны

A. Волны в изотропных и анизотропных средах

В отсутствии внешних зарядов имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{II.4})$$

Для монохроматических волн ($\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$ и т.д.)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (\text{II.7})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c} \mathbf{D}. \quad (\text{II.8})$$

В общем случае связь $\mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ может быть сложной. Для слабых полей ее можно считать линейной. Нелинейные эффекты проявляются в полях порядка атомных и будут обсуждаться далее отдельно. Тогда

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad B_i = \mu_{ik} H_k. \quad (\text{II.9})$$

Существуют еще вклады с $D \propto H$, $B \propto E$, но о них пока говорить не будем.

Важное свойство тензора ε — то, что он всегда симметричен (но не обязательно эрмитов),

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ki}(\omega). \quad (\text{II.10})$$

Это всегда так в отсутствии внешнего постоянного магнитного поля. Доказывать мы это в общем случае не будем, но можно убедиться, что для анизотропной молекулы может быть $\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{zz}$, но при этом всегда $\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy}$. Легко получить, обобщая (I.44),

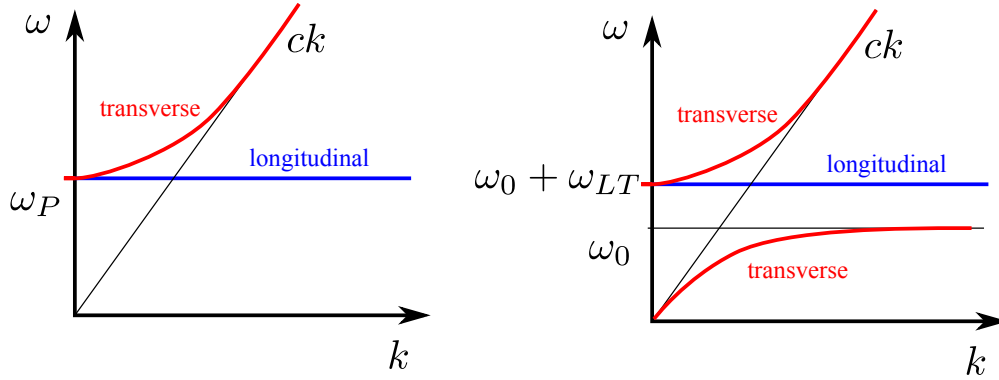


Рис. 22 Примеры: дисперсия электромагнитных волн в металле (слева) и поляритонов (справа)

что если электрон в молекуле может двигаться только вдоль направления \mathbf{n} , то $m\ddot{\mathbf{l}} = qE_i n_i - kl$, где $l = n_i r_i$ — проекция \mathbf{r} на \mathbf{n} и $\alpha_{ik} = q^2 n_i n_k / k = \alpha_{ki}$. Магнитное поле симметрию (II.10) нарушает (см. соответствующее ДЗ).

Выражая \mathbf{H} через \mathbf{E} получаем уравнение для поля в анизотропной среде в общем случае.

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{II.11})$$

Поскольку среда однородна, то будем искать решение в виде плоской волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{II.12})$$

$$-\mathbf{k} \times \frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E}_k, \quad (\text{II.13})$$

До этого места среда могла быть анизотропной, а ε и μ — тензорами.

Изотропные среды

Теперь будем временно считать, что среда изотропная, $\varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$, $\mu_{ik} = \mu \delta_{ik}$. Тогда

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) = -\varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_k, \quad (\text{II.14})$$

Это можно рассматривать как задачу на собственные значения для нахождения вектора \mathbf{E}_k и частоты ω . Умножая уравнение скалярно на \mathbf{k} видим, что $\omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k = 0$. Поэтому существуют три решения:

$$(a) \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{k} = 0,$$

$$\omega = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}} \quad (\text{II.15})$$

(2 поперечные моды)

(b) $\mathbf{E}_k \times \mathbf{k} = 0$, $\omega = 0$ or $\varepsilon = 0$ or $\mu = 0$ (продольная мода)

В вакууме продольной моды нет, а в среде может быть $\varepsilon = 0$.

Отметим, что в общем случае (II.15) — это еще не конечный ответ, а лишь уравнение на нахождение дисперсии $\omega(k)$. Его нужно решать при конкретных $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$. Вид решения в металле с $\varepsilon = 1 - \omega_P^2/\omega^2$ показан слева на рис. 33. Синим отмечена продольная волна с $\omega = \omega_P$, $\varepsilon(\omega_P) = 0$. Еще интереснее устроена дисперсия в резонансной среде, в которой

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2\omega_0\omega_{\text{LT}}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{II.16})$$

или, вблизи $\omega = \omega_0$ при $\omega_{\text{LT}} \ll \omega_0$,

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\text{LT}}}{\omega_0 - \omega}. \quad (\text{II.17})$$

Здесь ω_{LT} — т.н. частоты продольно-поперечного расщепления. Ее смысл становится ясен из рис. 33 (левая панель), на котором показано решения уравнения дисперсии с проницаемостью (II.17). Ветки красной кривой с $\omega > \omega_0$ и $\omega < \omega_0$ принято называть верхней и нижней поляритонными ветками, соответственно, а сами волны в резонансной среде — поляритонами. *Поляритоны* — это гибридные квазичастицы, образующиеся при взаимодействии света и возбуждений среды (например, экситонов или фононов).

Одноосные среды

Литература: ЛЛ8, §98.

Пусть теперь $\mu = 1$, а тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (\text{II.18})$$

В качестве микроскопической реализации можно представлять себе картинку на рис. 23(a) — вытянутые молекулы в узлах кубической решетки. Или рис. 23(b) — симметричные молекулы, но в деформированной решётки.

Тогда уравнение дисперсии имеет вид:

$$-\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (\text{II.19})$$

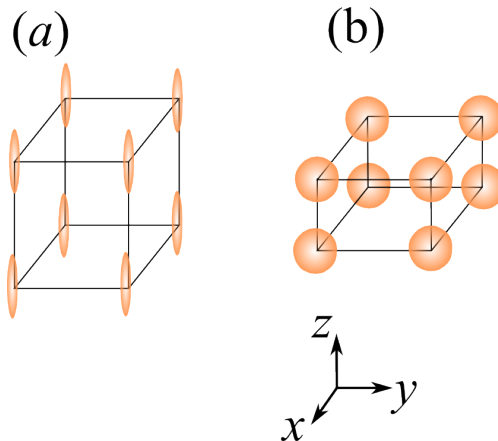


Рис. 23 Возможные реализации одноосных материалов

(индекс \mathbf{k} для краткости опускаем).

Проще всего получить частоты при $k_x = 0$, $E_y, E_z \neq 0$

$$\begin{pmatrix} k_y^2 + k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_z^2 & -k_z k_y \\ 0 & -k_z k_y & k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} E_x \\ \varepsilon_{xx} E_y \\ \varepsilon_{zz} E_z \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Видно, что можно выделить две поперечные поляризации:

(а) поперечная электрическая (transverse electric, TE), она же — обыкновенная. $E_y, E_z = 0$, $E_x \neq 0$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k_y^2 + k_z^2}{\varepsilon_{xx}} \quad (\text{II.21})$$

В векторном виде:

$$\text{TE: } \mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \times \mathbf{z}, \omega = ck/\sqrt{\varepsilon_{xx}}. \quad (\text{II.22})$$

(б) поперечная магнитная (transverse magnetic, TM), она же — необыкновенная. $E_y, E_z \neq 0$, $E_x = 0$

$$[k_z^2 - (\omega/c)^2 \varepsilon_{xx}][k_y^2 - (\omega/c)^2 \varepsilon_{zz}] = k_y^2 k_z^2 \quad (\text{II.23})$$

$$(\omega/c)^4 \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - (\omega/c)^2 [k_z^2 \varepsilon_{zz} + k_y^2 \varepsilon_{xx}] = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$(\omega/c)^2 = \frac{k_z^2 \varepsilon_{zz} + k_y^2 \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz}}. \quad (\text{II.25})$$

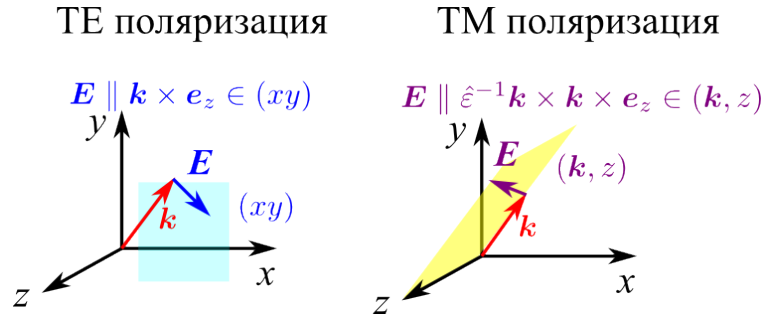


Рис. 24 Поляризации ТЕ и ТМ волн

В векторном виде:

$$\text{ТМ: } \mathbf{E} \parallel \hat{\epsilon}^{-1} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{z}), \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_{zz}} + \frac{k_z^2}{\epsilon_{xx}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (\text{II.26})$$

Поляризация называется поперечной магнитной потому, что $\mathbf{H} \perp \mathbf{e}_z \parallel \mathbf{k} \times \mathbf{e}_z$. Это можно легко проверить, также см. рис. 24. Необыкновенность же ее в том, что частота зависит от направления вектора \mathbf{k} — см. рис. 25.

Если на одноосную среду посветить в произвольном направлении (не вдоль оптической оси z) то внутри возникнут две волны с разными периодами, обыкновенная и необыкновенная, которые побегут в разных направлениях. Это явление называется *двулучепреломлением*.

Загадка: где продольная волна в одноосных средах? Ответ: см. задачу в домашнем задании.

Еще бывают так называемые гиперболические среды, в которых $\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} < 0$. Про них подробно написано в обзоре [Poddubny, Iorsh, Belov, and Kivshar, Hyperbolic metamaterials, Nature Photonics 7, 948-957 \(2013\)](#) Их можно реализовать как анизотропные проводящие среды. Например, если массы, описывающие движение электронов в направлениях x, y и z будут разными, то в интервале между плазменными частотами

$$\omega_{P,x} < \omega < \omega_{P,z} \text{ или } \omega_{P,x} > \omega > \omega_{P,z}, \text{ где } \omega_{P,x,z} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m_{x,z}}} \quad (\text{II.27})$$

материал будет гиперболическим. Тип изочастотной поверхности зависит от знаков диэлектрических проницаемостей, см. рис. 26.

Примеры естественных гиперболических материалов — графит в УФ области спектра или гексагональный нитрид бора в ИК области спектра. Более подробно про есте-

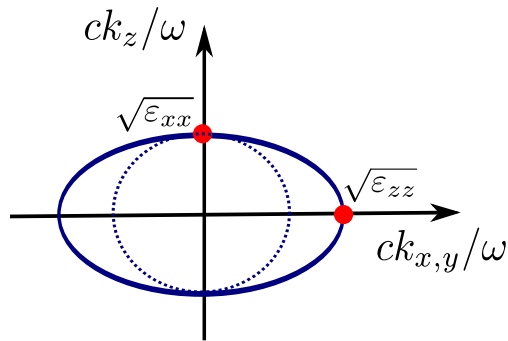


Рис. 25 Изочастотные контуры для ТЕ и ТМ волн. Красные стрелки — направление групповой скорости.

ственные гиперболические среды – см. обзор [Guo и др. J. Appl. Phys. 127, 071101 \(2020\)](#).

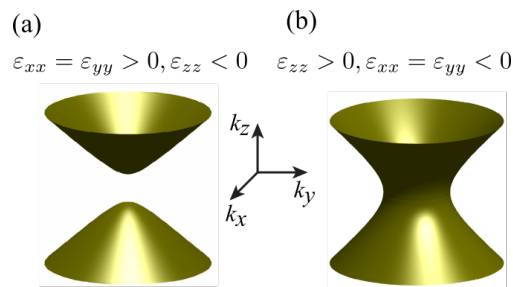


Рис. 26 Изочастотная поверхность для ТМ волн в гиперболических средах в зависимости от знаков компонент тензора диэлектрической проницаемости .

В. Временная дисперсия диэлектрической проницаемости.

Литература: ЛЛ8, §80

Энергия и групповая скорость волнового пакета

Временная дисперсия — зависимость ϵ от частоты ω (не путать с временной). Этимология — волны с разными частотами имеют разные скорости, и поэтому преодолевают одно и то же расстояние за разное время \Rightarrow разброс (т.е. дисперсия) по времени. Поэтому импульс, проходя через среду с временной дисперсией, искажается.

Поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\text{II.28})$$

то из уравнений Максвелла получаем закон сохранения в виде

$$Q + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \text{ где } Q = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (\text{II.29})$$

Видно, что естественным образом возник вектор Пойнтинга \mathbf{S} — плотность потока энергии электромагнитного излучения. И вид у него такой же, как и в вакууме. Интереснее обстоит дело с величиной Q .

Если ε и μ — константы, не зависящие от частоты (например, диэлектрик, нет зависимости ε от ω и потерь), то Q представляет собой полную производную по времени,

$$Q = \frac{dU}{dt}, U = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}. \quad (\text{II.30})$$

Тогда величина U имеет смысл плотности энергии электромагнитного поля.

В общем случае в среде энергию поля U не ввести, в отличие от электромагнитного поля в вакууме. Физически это связано с тем, что нельзя рассматривать поле отдельно от возбуждений среды. Однако для монохроматической волны физический смысл буквы Q все же можно понять:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}, \quad \dot{\mathbf{D}} = -i\varepsilon(\omega)\omega \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + i\varepsilon^*(\omega)\omega \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}, \quad (\text{II.31})$$

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = i\omega[\varepsilon(\omega) - \varepsilon^*(\omega)]|\mathbf{E}_0|^2 + e^{2i\omega t}(\dots) + e^{-2i\omega t}(\dots). \quad (\text{II.32})$$

Усредним это выражение по времени (обозначим усреднение верхней чертой):

$$\overline{Q} = \frac{\omega[\varepsilon''(\omega)|\mathbf{E}^2| + \mu''(\omega)|\mathbf{H}^2|]}{4\pi}, \quad (\text{II.33})$$

Теперь видно, что усредненное по времени значение Q имеет смысл скорости диссипации электромагнитного излучения. Это раскрывает физический смысл мнимой части диэлектрической проницаемости $\varepsilon''(\omega) \equiv \operatorname{Im}(\omega)$ (далее будем часто писать $\varepsilon \equiv \varepsilon' + i\varepsilon''$).

Пусть теперь в некоторой области частот $\varepsilon''(\omega)$ мало, а $\varepsilon'(\omega)$ медленно меняется.

Среда со слабой дисперсией в области прозрачности.

Литература: ЛЛ8, §80

Давайте попробуем посчитать энергию волнового пакета в такой среде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{E}_0^*(t)e^{i\omega_0 t}. \quad (\text{II.34})$$

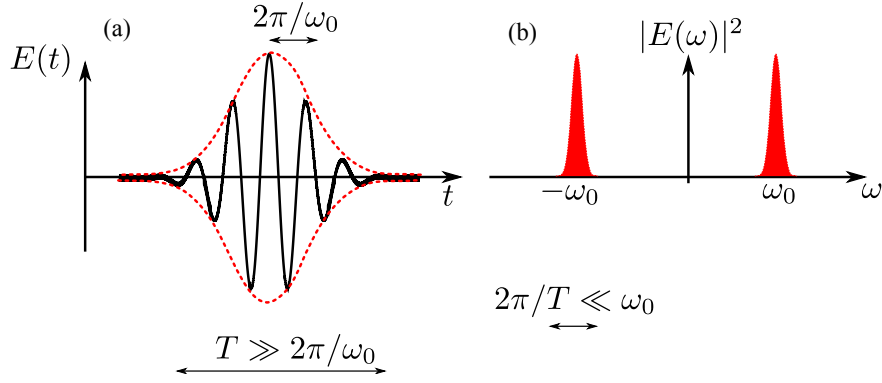


Рис. 27 Волновой пакет (а) и его спектр (b)

Здесь $E_0(t)$ — медленно меняющаяся по времени огибающая, красная кривая на рис. 27(a). Медленно — значит значительно медленнее, чем период волны $2\pi/\omega_0$.

Тогда

$$\mathbf{D}(t) = \int \frac{d\alpha}{2\pi} \varepsilon(\omega_0 + \alpha) \mathbf{E}_{0,\alpha} e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} + c.c. \quad (\text{II.35})$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}(t) &= -i \int \frac{d\alpha}{2\pi} (\omega_0 + \alpha) \left(\varepsilon_0 + \alpha \frac{d\varepsilon_0}{d\omega} \right) \mathbf{E}_{0,\alpha} e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} + c.c. \\ &= -i\omega_0 \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t} \varepsilon_0 - i \frac{d(\varepsilon\omega_0)}{d\omega_0} \int \frac{d\alpha}{2\pi} \alpha \mathbf{E}_0(\alpha) e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} + c.c. \\ &= -i\omega_0 \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t} \varepsilon_0 + \left. \frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \frac{d\mathbf{E}_0(t)}{dt} e^{-i\omega_0 t} + c.c. \quad (\text{II.36}) \end{aligned}$$

Первое слагаемое не дает вклада в \bar{Q} , т.к. мы в области прозрачности с $\text{Im} \varepsilon(\omega_0) = 0$ (ср. с. (II.33)).

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{d}{dt} U, \quad U = \frac{1}{4\pi} \left[\left. \frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} |\mathbf{E}_0|^2 + \left. \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} |\mathbf{H}_0|^2 \right] \\ &\equiv \frac{1}{8\pi} \left[\left. \frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \overline{|\mathbf{E}|^2} + \left. \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \overline{|\mathbf{H}|^2} \right]. \quad (\text{II.37}) \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что для вклада с μ все аналогично. Теперь величину U можно интерпретировать как плотность энергии волнового пакета в среде с дисперсией диэлектрической проницаемости. В случае, когда ε не зависит от ω , оно сводится к (II.30). Посчитаем теперь вектор Пойнтинга для плоской волны. Из уравнений Максвелла с учетом закона дисперсии

$$\omega = \frac{ck(\omega)}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (\text{II.38})$$

легко получить, что

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}_0. \quad (\text{II.39})$$

Поэтому средний по времени вектор Пойнтинга равняется

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0} = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + e^{-2i\omega t}(\dots) + e^{2i\omega t}(\dots)} = \frac{c}{2\pi} \text{Re } \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \quad (\text{II.40})$$

Окончательно, с учетом что $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = \mathbf{k}E_0^2 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) = \mathbf{k}E_0^2$, находим

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\mathbf{k}}{k} |E_0|^2. \quad (\text{II.41})$$

Выражение (II.37) можно преобразовать следующим образом:

$$U = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} |\mathbf{E}_0|^2 + \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} |\mathbf{H}_0|^2 \right] = \frac{|E_0|^2}{4\pi\mu} \left[\mu \frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} + \varepsilon \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} \right] \\ = \frac{c|E_0|^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (\text{II.42})$$

где мы подставили $\omega = ck(\omega)/\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ и учли, что вклады с производными от ε и μ взаимно уничтожились,

$$\mu \frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + \varepsilon \frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 0 \text{ т.к. } y^2 \frac{d}{d\omega} y + \frac{d}{d\omega} \frac{1}{y} \equiv 0, \quad y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (\text{II.43})$$

Теперь можно ввести *групповую скорость*:

$$v_g = \frac{S}{U} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (\text{II.44})$$

По определению, групповая скорость — соотношение плотности потока импульса электромагнитного поля и плотности энергии поля. Поэтому она имеет смысл скорости переноса энергии волной, в отличие от *фазовой скорости* ω/k , которая характеризует скорость распространения фазового фронта. Еще полезна аналогия с уравнением Гамильтона $\mathbf{p} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}}$.

Смысл групповой скорости можно понять и другим способом, непосредственно рассматривая распространение волнового пакета. Для простоты будем считать задачу скалярной. Запишем волновой пакет с огибающей в виде гауссиана,

$$E(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{ik(\omega)x - i\omega t} \frac{e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\delta^2}}}{\sqrt{2\pi}\delta} + c.c. \quad (\text{II.45})$$

а в отстройке частоты от ω_0 воспользуемся разложением в ряд Тейлора до первого слагаемого:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad k(\omega)x - i\omega t = k(\omega_0)x - i\omega_0 t + (x/v_g - t)\Delta\omega \quad (\text{II.46})$$

$$E(x, t) = e^{ik(\omega_0)x - i\omega_0 t} \int \frac{d\Delta\omega}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2\delta^2} + i(x/v_g - t)\Delta\omega}}{\sqrt{2\pi}\delta} + c.c. = e^{ik(\omega_0)x - i\omega_0 t} e^{-\frac{\delta^2(x/v_g - t)^2}{2}} + c.c. \quad (\text{II.47})$$

Теперь видно, что пакет распространяется, не меняя форму с групповой скоростью v_g . При это фаза бежит с фазовой скоростью $\omega_0/k(\omega_0)$.

Q1: К чему приведёт учет слагаемых $\propto d^2\varepsilon/d\omega^2$ в разложении? Ответ: к расплыванию волнового пакета в пространстве со временем.

Q2: Что делать, если вдруг групповая скорость окажется больше скорости света, $v_g > c$? Формально это ничему не противоречит. Ответ: ничего страшного, просто понятие групповой скорости теряет смысл и нужно учитывать зависимость $\varepsilon(\omega)$ полностью, а не ограничиваться первым слагаемым в разложении.

Иногда наоборот, в области резонансов получают малые значения $d\omega/dk \ll c$ — т.н. *медленный свет*. При этом нужно помнить, что в области резонансов большое поглощение и импульс не только замедлится, но и ослабится. Критический обзор работ на эту тему дан в статье [Е. Б. Александров, В. С. Запасский, *В погоне за “медленным светом”*, УФН **176** 1093 (2006); <https://ufn.ru/ru/articles/2006/10/f/references.html>]. Еще есть свежий обзор [И.Н. Топтыгин, К. Левина, “Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в средах с дисперсией”, УФН **186**, 146 (2016), <https://ufn.ru/ru/articles/2016/2/d/>].

Групповая скорость в анизотропных средах

До сих пор в нашем выводе групповой скорости предполагалась, что среда изотропная. Однако его можно обобщить и на анизотропные среды, в которых закон $\omega(\mathbf{k})$ будет зависеть от направления \mathbf{k} . Рассмотрим в качестве примера *монохроматическую* ТМ поляризованную волну в одноосной среде с тензором диэлектрической проницаемости (II.18), и пренебрежем потерями и временной дисперсией.

Пусть для простоты выкладок оси выбраны так, что $k_x = 0$, т.е. волновой вектор лежит в плоскости yz . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{E} = -\frac{c}{\omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{k} \times \mathbf{H} = \\ \varepsilon^{-1} \left(-\frac{c}{\omega} H_0 k_z \mathbf{e}_y + \frac{c}{\omega} k_y H_0 \mathbf{e}_z \right) = -\frac{c}{\omega} H_0 \frac{k_z}{\varepsilon_{xx}} \mathbf{e}_y + \frac{c}{\omega} \frac{k_y}{\varepsilon_{zz}} H_0 \mathbf{e}_z. \quad (\text{II.48}) \end{aligned}$$

(мы учли что $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$) и вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{c^2 |H_0^2|}{2\pi\omega} \left(\frac{k_y}{\varepsilon_{zz}} \mathbf{e}_y + \frac{k_z}{\varepsilon_{xx}} \mathbf{e}_z \right). \quad (\text{II.49})$$

Энергия волны

$$U = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \varepsilon \mathbf{E} + H^2) = \frac{|H_0^2|}{4\pi} \left(\frac{k_z^2}{\varepsilon_{xx}(\omega/c)^2} + \frac{k_y^2}{\varepsilon_{zz}(\omega/c)^2} + 1 \right) = \frac{|H_0^2|}{2\pi}. \quad (\text{II.50})$$

где мы учли дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \frac{k_z^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{k_y^2}{\varepsilon_{zz}}. \quad (\text{II.51})$$

Таким образом, групповая скорость по определению равняется

$$\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{S}}{U} = \frac{c^2}{\omega} \left(\frac{k_y}{\varepsilon_{zz}} \mathbf{e}_z + \frac{k_z}{\varepsilon_{xx}} \mathbf{e}_y \right). \quad (\text{II.52})$$

С другой стороны, дифференцируя по \mathbf{k} уравнение (II.51), мы получаем, что

$$\frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{k_y}{\varepsilon_{zz}}, \quad \frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{k_z}{\varepsilon_{xx}}. \quad (\text{II.53})$$

Сравнивая с (II.52), находим, что

$$\mathbf{v}_g(\omega) = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \equiv \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}. \quad (\text{II.54})$$

Теперь ответ уже записан в векторном виде, им можно пользоваться и при $k_x \neq 0$. Отметим, что в этом выводе вообще нигде не учитывалась временная дисперсия проницаемости. Однако все равно групповая скорость оказывается не параллельна и не равна по модулю фазовой из-за того, что среда анизотропная. В частности, групповая скорость будет не параллельна \mathbf{k} , а перпендикулярна изочастотному контуру, см. красные стрелки на рис. 25. При этом групповая скорость будет разной для ТЕ и ТМ мод (но не имеет смысла в точке вырождения мод, т.е. при $\mathbf{k} \parallel z$). Ответ $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})$ оказывается справедлив и с учетом зависимости $\varepsilon(\omega)$.

Запаздывающий отклик и причинность. Соотношения Крамерса-Кронига.

Литература: ЛЛ8,§82; ЛЛ5,§123

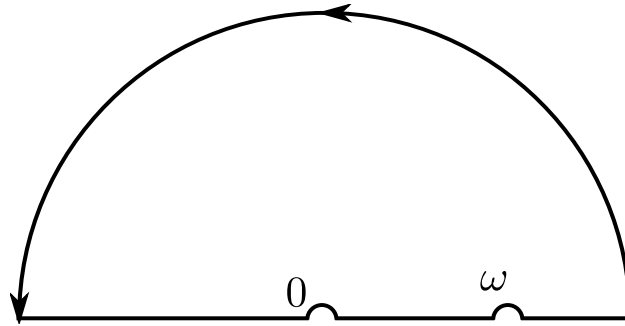


Рис. 28 Контур интегрирования для доказательства соотношений Крамерса-Кронига

Ранее мы писали $D(\omega) = \varepsilon(\omega)E(\omega)$, т.е. вводили диэлектрическую проницаемость как связь между частотными гармониками полей. Запишем связь между собой полей, как функций времени:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_0^{\infty} f(\tau)\mathbf{E}(t - \tau) d\tau. \quad (\text{II.55})$$

Ключевой момент: поле \mathbf{D} определяется значением поля \mathbf{E} не только в данный момент времени, а полями во все предыдущие моменты времени (т.е. есть запаздывание отклика). От значений поля $\mathbf{E}(t')$ в будущем при $t' > t$ поле $\mathbf{D}(t)$ зависеть не может — *принцип причинности*. Записывая в явном виде

$$\mathbf{D}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{D}(\omega) \quad (\text{II.56})$$

получаем, что

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{II.57})$$

Из вещественности f следует, что

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega). \quad (\text{II.58})$$

Соотношения Крамерса-Кронига

Запишем

$$\varepsilon(\omega) = 1 + f(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega). \quad (\text{II.59})$$

Из конечности $f(\tau)$ и уравнения (II.57) следует, что $\varepsilon(\omega)$ и $f(\omega)$ конечны при $\text{Im } \omega > 0$. Значит, функция $\varepsilon(\omega)$ не может иметь полюсов в верхней полуплоскости комплексной частоты ω , а также $f(\omega) \rightarrow 0, \varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости. Это

является прямым проявлением принципа причинности — ни одна *функция отклика* (поляризуемость, восприимчивость и т.д.) не может иметь полюсов в верхней полуплоскости. Здесь важно помнить, что временная зависимость у нас $e^{-i\omega t}$. В некоторых “электротехнических” книжках иногда пишут $e^{i\omega t}$ и тогда полюсов не будет в нижней полуплоскости. Но у нас всегда подразумевается зависимость $\propto e^{-i\omega t}$ и полюсов нет в верхней.

Отсутствие полюсов в верхней полуплоскости позволяет получить связь между вещественными и мнимыми частями функции $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Проинтегрируем $f(\omega)$ по контуру на рис. 28. Так как контур не содержит полюсов, то интеграл равен нулю:

$$\oint \frac{d\omega' f(\omega')}{\omega' - \omega} = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} f(\omega') + (i\pi) \frac{4\pi i \sigma}{\omega} - i\pi f(\omega) = 0. \quad (\text{II.60})$$

Проводимость здесь — это проводимость на нулевой частоте, если она есть, она возникла из-за обхода точки 0. Мы учли, что вблизи нулевой частоты $\varepsilon(\omega) \propto 4\pi i \sigma / \omega$.

Отсюда получаем *соотношения Крамерса-Кронига*:

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \varepsilon''(\omega') = 1 + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{2\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \varepsilon''(\omega') \quad (\text{II.61})$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} - \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} [\varepsilon(\omega') - 1]. \quad (\text{II.62})$$

В таком виде эти соотношения годятся и для металлов и для диэлектриков. Для диэлектриков просто полагаем $\sigma = 0$, т.к. особенности на нулевой частоте не будет.

Соотношения Крамерса-Кронига можно и не помнить, но важно помнить ключевой момент: вещественная и мнимые части диэлектрической проницаемости не являются независимыми функциями. Поэтому не всякая функция частоты может быть диэлектрической проницаемостью какого-то вещества. В экспериментах иногда удобно измерить $\varepsilon''(\omega)$ неизвестного материала, например, из спектров поглощения, а уже по ней восстановить $\varepsilon'(\omega)$, см. [H. R. Philipp, and H. Ehrenreich, J. Appl. Phys. **35**, 1416 (1964); <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1713642>].

Вопрос: удовлетворяет ли соотношениям Крамерса-Кронига формула Друде? формула (II.17) для резонансной диэлектрической проницаемости?

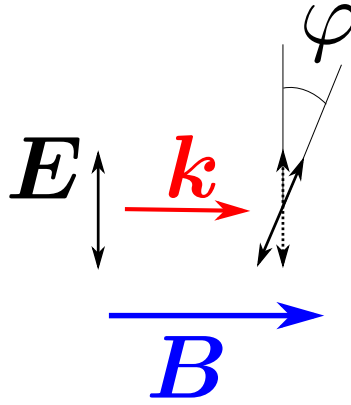


Рис. 29 Эффект Фарадея

С. Оптическая активность. Пространственная дисперсия

Оптическая активность — это способность среды (кристаллов, растворов, паров вещества) вызывать вращение плоскости поляризации проходящего через неё оптического излучения (света).

Эффект Фарадея

Эффект Фарадея — вращение плоскости линейной поляризации света, распространяющегося в среде вдоль магнитного поля. Обнаружен Майклом Фарадеем в 1845 году. Иными словами, это оптическая активность наведенная магнитным полем.

Не снижая общности, пусть магнитное поле направлено вдоль оси z , $\mathbf{B} \parallel z$. В одной из задач ДЗ мы изучали диэлектрическую проницаемость газа электронов массой m , концентрацией n и временем релаксации τ во внешнем магнитном поле. Уравнение динамики электрона:

$$m\ddot{\mathbf{r}} - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\tau} = e\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} \propto e^{-i\omega t}. \quad (\text{II.63})$$

Из него можно получить тензор диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = 1 + \frac{4\pi i \hat{\sigma}}{\omega}, \quad \sigma = \frac{e^2 n \tau}{m} \begin{pmatrix} \frac{1-i\omega\tau}{[1-i(\omega+\omega_c)\tau][1-i(\omega-\omega_c)\tau]} & \frac{\omega_c\tau}{[1-i(\omega+\omega_c)\tau][1-i(\omega-\omega_c)\tau]} & 0 \\ \frac{-\omega_c\tau}{[1-i(\omega+\omega_c)\tau][1-i(\omega-\omega_c)\tau]} & \frac{1-i\omega\tau}{[1-i(\omega+\omega_c)\tau][1-i(\omega-\omega_c)\tau]} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-i\omega\tau} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.64})$$

где $\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота.

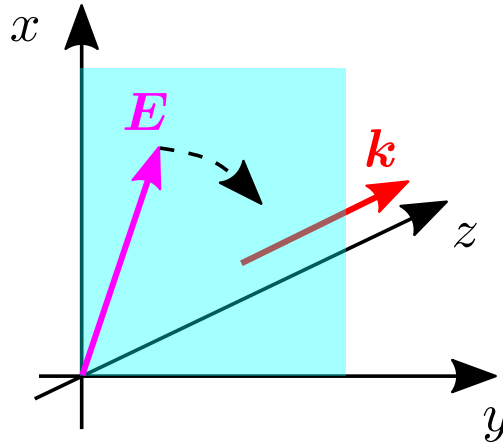


Рис. 30 Правоциркулярно поляризованная волна, $\propto \mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y$, распространяющаяся в направлении $+z$.

Рассмотрим, как в среде с такой диэлектрической проницаемостью распространяются циркулярно поляризованные электромагнитные волны

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_{\pm} + c.c., \quad \mathbf{E}_{\pm} = \frac{\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} e^{ik_{\pm}z - i\omega t}. \quad (\text{II.65})$$

В базисе этих волн можно получить

$$\varepsilon \mathbf{E}_{\pm} = \varepsilon_{\pm} \mathbf{E}_{\pm}, \quad \text{где } \varepsilon_{\pm} = 1 + \frac{4\pi i \hat{\sigma}_{\pm}}{\omega}, \quad \sigma_{\pm} = \frac{e^2 n \tau}{m} \frac{1}{1 - i(\omega \pm \omega_c) \tau}. \quad (\text{II.66})$$

Иными словами, в базисе циркулярно поляризованных волн тензор $\varepsilon_{2 \times 2}$ опять будет диагонален,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_+ & 0 \\ 0 & \varepsilon_- \end{pmatrix}. \quad (\text{II.67})$$

Поэтому циркулярно поляризованные волны будут распространяться с разными волновыми векторами,

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\pm}}. \quad (\text{II.68})$$

Видно, что из-за магнитного поля $k_+ \neq k_-$. Принято разделять два эффекта. Эффект связанный с $\text{Im } k_+ \neq \text{Im } k_-$ — циркулярный дихроизм, т.е. разное поглощение право- и лево- циркулярно поляризованных волн. Он особенно ярко проявится вблизи циклотронного резонанса при $\omega = \omega_c$ — тогда волна \mathbf{E}_+ пройдет через вещество, а волна \mathbf{E}_- резонансно поглотится.

Второй, эффект связанный с разным преломлением двух волн, $\text{Re } k_+ \neq \text{Re } k_-$ — это и есть эффект Фарадея.

Результат эффекта Фарадея — вращение плоскости поляризации линейно поляризованного света при прохождении через образец. Действительно, пусть при $z = 0$ волна поляризована вдоль x и будем считать, что $\text{Im } k_{\pm} = 0$. Тогда волну можно представить как полусумму право- и лево- циркулярно поляризованных, циркулярно поляризованные волны будут распространяться по образцу с разными скоростями и поле будет вращаться, см. рис. 29:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) &= \mathbf{E}_+(z) + \mathbf{E}_-(z) \propto \mathbf{e}_x(e^{ik_+z} + e^{ik_-z}) + i\mathbf{e}_y(e^{ik_+z} - e^{ik_-z}) \\ &\propto e^{i(k_++k_-)z/2}[\mathbf{e}_x \cos \varphi(z) - \mathbf{e}_y \sin \varphi(z)] \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

где угол поворота

$$\varphi(z) = \frac{k_+ - k_-}{2}z = VBz, \quad (\text{II.70})$$

и введена *постоянная Верде* V . Угол поворота линеен и по магнитному полю и по пройденному волной расстоянию. Постоянную Верде можно оценить как

$$V \sim \frac{1}{B\lambda} \frac{k_+ - k_-}{k_+ + k_-} \sim \frac{\omega_c}{B\omega} \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{II.71})$$

В поле $B = 1 \text{ Т} = 10^4 \text{ Г}$ для циклотронной частоты получаем $\omega = eB/mc \sim 5 \times 10^4 / (3 \times 10^{-27} \times 10^{10}) \sim 10^{11} \text{ 1/s}$. Поэтому $\omega_c/\omega \sim 10^{-4}$, $\lambda \sim 10^{-4} \text{ см}$ и $V \sim 1 \text{ rad/T} \cdot \text{см}$, в согласии с литературными [данными](#).

Вопрос: что будет, если волна отразится от зеркала и пробежит то же расстояние назад? суммарный угол поворота сложится или обратится в ноль?

Ответ: угол поворота удвоится, т.к. в (II.70) произойдет одновременная замена $k_{\pm} \rightarrow -k_{\pm}$ и $z \rightarrow -z$. Поэтому в резонаторах фарадеевское вращение возрастает за счет многократного прохождения светом пути между стенками, см. также картинку в таблице II.

В векторном виде линейный по магнитному полю \mathbf{B}_0 вклад в вектор \mathbf{D} или поляризацию можно написать как

$$\mathbf{D} \propto i\mathbf{B}_0 \times \mathbf{E}, \quad (\text{II.72})$$

Еще бывает *магнито-оптический эффект Керра* — зависимость коэффициентов отражения от магнитного поля, подробнее, см. А.К. Zvezdin, V.A. Kotov, “Modern

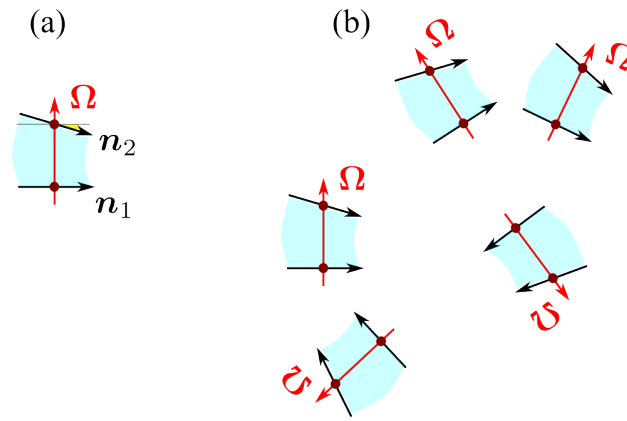


Рис. 31 Модель гиротропной среды — массив случайно ориентированных спиральных молекул из линейных диполей

Magnetooptics and Magneto-optical Materials”, Taylor and Francis (1997) и картинку в таблице II. Его не следует путать с нелинейным оптическим эффектом Керра (зависимостью диэлектрической проницаемости от интенсивности света).

Подробнее см. также ЛЛ8, §101.

Хороший и простой обзор по магнитооптике: М. Freiser, “A survey of magneto-optic effects”, IEEE Transactions on Magnetics 4, 152-161 (1968), <http://ieeexplore.ieee.org/document/1066210/>

Естественная оптическая активность. Пространственная дисперсия

Оказывается, что вращение плоскости линейной поляризации в некоторых средах возможно и без внешнего магнитного поля. Это явление называют естественной оптической активностью, или гиротропией. Экспериментально обнаружено Франсуа Жаном Домиником Араго в кварце в 1811 году.

Такой эффект бывает в средах без центра инверсии, т.е. таких, которые не переходят сами в себя при замене $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Среда можно представлять себе как массивы спиралек, закрученных в одну сторону, см. рис. 31. Рассмотрим примитивную модель спиральной “молекулы”, состоящей из двух повернутых относительно друг друга линейных осцилляторов, т.е.

$$\mathbf{n}_2 \approx \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_1 \approx \mathbf{n}_2 - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}_2, \quad (\text{II.73})$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор, характеризующий угол поворота. Гамильтониан молекулы можно на-

писать в виде

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{k(x_1^2 + x_2^2)}{2} + U - e\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_1 - e\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2, \quad U = \frac{k'}{2}(x_1\mathbf{n}_1 - x_2\mathbf{n}_2)^2, \quad (\text{II.74})$$

где

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} + c.c. \quad (\text{II.75})$$

электрическое поле, а $\mathbf{r}_{1,2}$ — координаты осцилляторов.

Без взаимодействия между осцилляторами мы похожую задачу решали ранее при рассмотрении поляризации в диэлектрике. Теперь учтем взаимодействие по теории возмущений по параметру k' .

$$x_{1,2} = x_{1,2}^{(0)} + x_{1,2}^{(1)} + \dots \quad (\text{II.76})$$

В нулевом приближении, при $k' = 0$, получим

$$x_1^{(0)} \propto \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_1 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1}, \quad x_2^{(0)} \propto \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_2}. \quad (\text{II.77})$$

Отметим, что мы учитываем зависимость электрического поля от координаты $\propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$.

Это будет важно для дальнейшего. Запишем теперь первое приближение по k' :

$$x_1^{(1)} \propto \left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^{(0)}, x_2=x_2^{(0)}} \propto x_2^{(0)}, \quad x_2^{(1)} \propto \left. \frac{\partial U}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_1^{(0)}, x_2=x_2^{(0)}} \propto x_1^{(0)} \quad (\text{II.78})$$

Линейный по k' вклад в поляризацию:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = e\mathbf{n}_1 x_1^{(1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + e\mathbf{n}_2 x_2^{(1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (\text{II.79})$$

Удобно перейти в обратное пространство:

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} + \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}. \quad (\text{II.80})$$

Учтем, что для нашей “спиральной молекулы” два составляющих ее линейных диполя сдвинуты в направлении вектора $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \alpha \mathbf{\Omega} \quad (\text{II.81})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{k}) &\propto \mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}) e^{i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}} + \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E}) e^{-i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}} \\ &= [\mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E})] + i\alpha (\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}) [\mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E})]. \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

Далее нужно подставить в это уравнение (II.81), (II.73) и аккуратно разложить ответ в ряд по степеням Ω . Поскольку молекулы ориентированы случайно, то мы планируем усреднить по направлениям спиралек Ω , т.е. по углу вектора Ω . Это значит, что линейные по Ω вклады обратятся в ноль. Вклады, не зависящие от Ω , есть, но в них не входит волновой вектор и они не приведут к желаемому эффекту. Нас интересуют лишь вклады, пропорциональные $\Omega^2 k$, а именно

$$P(\mathbf{k}) \propto 2i(\mathbf{k} \cdot \Omega)(\Omega \times \mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{II.83})$$

Далее индекс 1 у \mathbf{n}_1 не нужен, отличие \mathbf{n}_1 от \mathbf{n}_2 мы уже учли, и будем писать просто \mathbf{n} . Усредним по углу поворота спиральки вокруг своей оси, т.е. по ориентации вектора \mathbf{n} в плоскости, перпендикулярной вектору $\Omega \parallel z$:

$$(\Omega \times \mathbf{n})\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = (E_x n_x + E_y n_y)(e_x n_y \Omega_z - e_y n_x \Omega_z) \rightarrow \frac{1}{2}(e_x E_y \Omega_z - e_y E_x \Omega_z) \equiv -\frac{1}{2}\Omega \times \mathbf{E}. \quad (\text{II.84})$$

Итого после усреднения по углам \mathbf{n} будет вклад

$$P(\mathbf{k}) \propto i(\mathbf{k} \cdot \Omega)\Omega \times \mathbf{E}. \quad (\text{II.85})$$

Наконец, усредним по направлениям спиралек, т.е. углу вектора Ω , и получим окончательный ответ:

$$P(\mathbf{k}) \propto i\mathbf{k} \times \mathbf{E}. \quad (\text{II.86})$$

Это ответ интересно проанализировать с точки зрения симметричных соображений. В среде с центром инверсии такого вклада в поляризацию быть не может, поскольку слева стоит вектор, а справа — псевдовектор. При зеркальном отражении среды псевдовектор не меняет знак, а вектор — меняет. Равенство между ними может выполняться лишь в том случае, когда центра инверсии в среде нет — т.е. если спиральки закручены преимущественно в одну сторону.

Отметим, что полученный ответ очень похож на (II.72) с той лишь разницей, что теперь вместо \mathbf{H} у нас \mathbf{k} . Поэтому плоскость поляризации будет вращаться так же, как и в эффекте Фарадея, а эффект называют естественной оптической активностью.

В чуть более общем виде можно написать

$$P(\mathbf{E}) \propto a\mathbf{E} + i\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (\text{II.87})$$

или

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}) \propto \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{k}) + ig\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}), \quad (\text{II.88})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \propto \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - g \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.89})$$

где \mathbf{g} — т.н. вектор гирации. В тензорном виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta}(1 + 4\pi a) - 4\pi i b e_{\alpha\beta\gamma} k_\gamma \quad (\text{II.90})$$

Для циркулярно поляризованных волн

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_0 \pm igk. \quad (\text{II.91})$$

Для естественной оптической активности суммарный угол поворота плоскости поляризации при проходе через среду туда и обратно равен нулю, в отличие от эффекта Фарадея. Это связано с тем, что эффект линеен по волновому вектору света, а значит, будет менять знак для распространения вперед и назад.

Отметим, что мы получили линейную зависимость диэлектрической проницаемости от волнового вектора света. В общем случае эффект зависимости $\varepsilon(\mathbf{k})$ называют *пространственной дисперсией* диэлектрической проницаемости. При этом говорят про *нелокальность диэлектрического отклика*, т.е. вектор $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ начинает зависеть не только от $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, но и от значений \mathbf{E} во всем пространстве. Таковую связь можно написать в виде $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int d^3r' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')$ по аналогии с выражением (II.55) для временной дисперсии. В нашем \mathbf{D} зависит от первых производных \mathbf{E} , см. (II.89), и линеен по волновому вектору. Это может быть лишь в средах без центра инверсии.

Подробнее про естественную оптическую активность см. также ЛЛ8, §104.

Сводка наших результатов по оптической активности приведена в таблице II.

Естественная оптическая активность используется в жидкокристаллических мониторах, а также для определения соотношения право- и лево-закручивающих молекул в растворах, см. [N. J Greenfield, “Using circular dichroism spectra to estimate protein secondary structure”, Nature Protocols **1**, 2876 - 2890 (2007), <http://www.nature.com/nprot/journal/v1/n6/full/nprot.2006.202.html>].

В качестве примера твердого тела с оптической активностью выступает, например, теллур, см. рис. 32.

В средах с центром инверсии зависимость начинается с квадратичных слагаемых, $\varepsilon = \varepsilon_0 + dk^2 \dots$, см. также ЛЛ8, §105. Явление пространственной дисперсии слабое

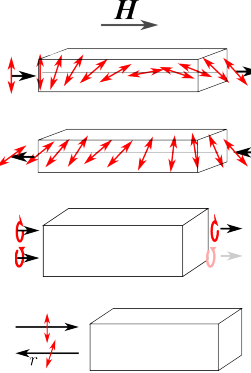
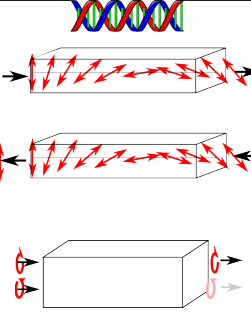
Материальное соотношение	Проявление	
$D \propto i\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}$	Эффект Фарадея Циркулярный дихроизм Магнитооптический эффект Керра	
$D \propto i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$	Естественная оптическая активность Циркулярный дихроизм	

Таблица II Оптическая активность и связанные эффекты

— чтобы его учесть, нам потребовалось ввести зависимость электрического поля от координат на масштабах размера молекулы, когда мы учитывали в (II.82) отличие экспонент $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{1,2}}$ от единицы. Поэтому параметр малости — отношение длины волны и размера молекулы. Однако, в некоторых условиях эффекты и линейной и квадратичной пространственной дисперсии проявляются.

Порядок величин: для кристалла теллура при $\lambda = 5$ мкм угол поворота света за счет естественной оптической активности примерно 1 рад/мм $= 5 \times 10^{-3} 1/\lambda$ [Л.С. Дубинская, И.И. Фарбштейн, ФТТ **20**, 753 (1978)]. Поэтому на одной длине волны свет повернется на угол 5×10^{-3} рад. С другой стороны, постоянная решетки $a \sim 0.5$ нм и параметр малости $ka = 2\pi a/\lambda \sim 6 \times 10^{-4}$, т.е. почти того же порядка, что в эксперименте. На самом деле сила эффекта сильно зависит от частоты, кроме того, показатель преломления в теллуре на $5 \mu\text{m}$ равен примерно 5, а значит, волновой вектор в 5 раз больше.

Экситонные поляритоны.

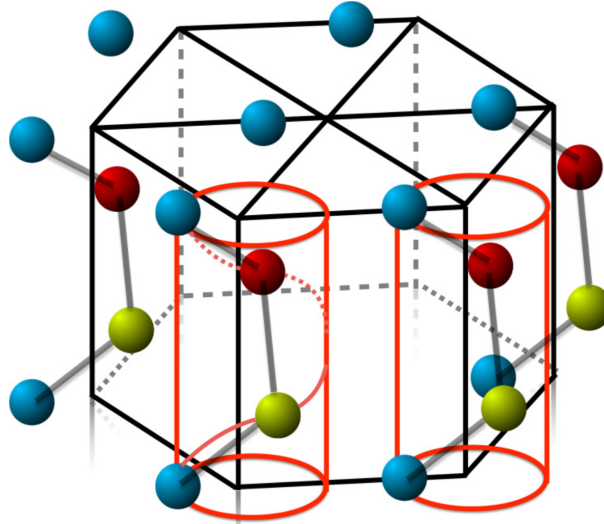


Рис. 32 Кристаллическая решетка теллура (картинка из статьи Phys. Rev. B **96**, 035120 (2017))

Также существует явление резонансной пространственной дисперсии. В полупроводниках, вблизи экситонного резонанса на частоте ω_0 , диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon(\omega, k) = \varepsilon_b \left(1 + \frac{\omega_{\text{LT}}}{\omega_0 + \frac{\hbar}{2M}k^2 - \omega} \right), \quad (\text{II.92})$$

где M — масса экситона, а ε_b — фоновая диэлектрическая проницаемость, учитыва-

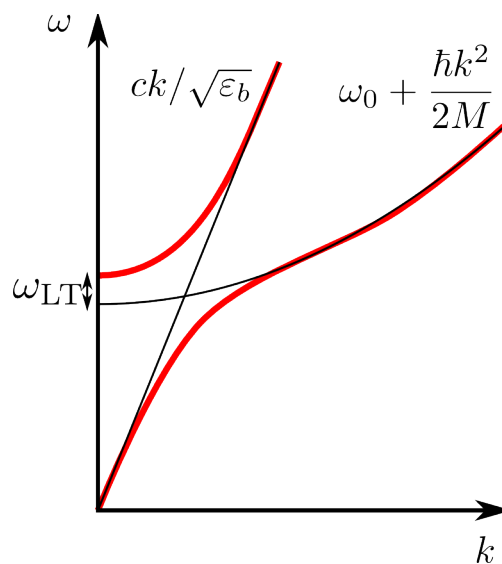


Рис. 33 Дисперсия поперечных экситонных поляритонов

ющая нерезонансную поляризацию всех остальных возбуждений. Пространственная дисперсия возникает за счет движения экситона. Сравнивая (II.92) с (II.17) видим, что теперь к резонансной энергии $\hbar\omega_0$ добавлена кинетическая энергия движения экситона, $\hbar k^2/2M$. Именно это и приводит к зависимости $\varepsilon(k)$. Нелокальный отклик за счет экситонного резонанса можно понять следующим образом: в некоторой точке пространства фотон поглощается с образованием экситона, затем экситон распространяется по кристаллу, и переизлучает фотон в другой точке кристалла. Собственные волны в такой системе — экситонные поляритоны. Закон дисперсии для поперечных экситонных поляритонов определяется из уравнения $k^2 = (\omega/c)\varepsilon(\omega, k)$ и схематически показан на рис. 33.

Параметры Стокса

Литература: Ландау и Лифшиц, т.2. (Теория поля), §50.

В предыдущих разделах нами была рассмотрена оптическая активность, которая приводит к изменению поляризации света. А как эту поляризацию описывать в общем случае?

Пусть электрическое поле волны в некоторой точке зависит от времени как

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t} + c.c. \quad (\text{II.93})$$

где $\mathbf{E}_0(t)$ — плавная огибающая. В эксперименте интерес представляют квадратичные функции поля,

$$E_\alpha(t)E_\beta(t) = E_{0,\alpha}E_{0,\beta}^* + c.c. + e^{-2i\omega t}(\dots) + c.c. \quad (\text{II.94})$$

усредненные по быстрым осцилляциям, т.е.

$$\overline{E_\alpha(t)E_\beta(t)} = \overline{E_{0,\alpha}E_{0,\beta}^*} + c.c. \quad (\text{II.95})$$

Не снижая общности можно считать, что для поперечной плоской волны $E_{0,z} = 0$, т.е. вектор \mathbf{E}_0 лежит в плоскости xy . Тогда поле полностью характеризуется тензором

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0,\alpha}(t)E_{0,\beta}^*}, \quad \alpha, \beta = x, y. \quad (\text{II.96})$$

Нас интересует поляризация волны, поэтому можно поделить на суммарную интенсив-

ность волны и ввести *поляризационную матрицу плотности*

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{\text{Tr } J} = \frac{1}{\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|}} \begin{pmatrix} \overline{|E_{0,x}^2|} & \overline{E_{0,x}E_{0,y}^*} \\ \overline{E_{0,y}E_{0,x}^*} & \overline{|E_{0,y}^2|} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.97})$$

Запишем определитель поляризационной матрицы плотности:

$$\det \rho = \frac{1}{\left(\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|}\right)^2} \left(\overline{|E_{0,x}^2|} \overline{|E_{0,y}^2|} - \overline{|E_{0,x}E_{0,y}^*}|^2 \right). \quad (\text{II.98})$$

Для полностью поляризованного света усреднение можно не проводить, т.е. горизонтальные черты можно убрать, и тогда $\det \rho = 0$. Благодаря неравенству Шварца числитель в (II.98) неотрицателен, а значит, $\det \rho \geq 0$. С другой стороны, для неполяризованного света $\overline{|E_{0,x}^2|} = \overline{|E_{0,y}^2|}$ и $\overline{|E_{0,x}E_{0,y}^*}| = 0$, так что $\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ и $\det \rho = 1/4$. Из (II.98) видно, что $\det \rho \leq 1/4$, т.к

$$\det \rho - \frac{1}{4} = \frac{4 \left(\overline{|E_{0,x}^2|} \overline{|E_{0,y}^2|} - \overline{|E_{0,x}E_{0,y}^*}|^2 \right) - \left(\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|} \right)^2}{4 \left(\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|} \right)^2} = \frac{-4 \overline{|E_{0,x}E_{0,y}^*}|^2 - \left(\overline{|E_{0,x}^2|} - \overline{|E_{0,y}^2|} \right)^2}{4 \left(\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|} \right)^2} \leq 0 \quad (\text{II.99})$$

Поэтому определитель матрицы плотности пробегает значения от 0 до 1/4 для полностью поляризованного и неполяризованного света, соответственно. Введем *степень поляризации света* $P \in 0 \dots 1$,

$$P = \sqrt{1 - 4 \det \rho}, \quad \det \rho = \frac{1}{4}(1 - P^2). \quad (\text{II.100})$$

Матрицу плотности удобно переписать через т.н. *параметры Стокса*,

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.101})$$

которые полностью определяют поляризацию света. Здесь $\sigma_{1,2,3}$ — это матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Физический смысл параметров Стокса:

$$\xi_3 = \frac{\overline{|E_{0,x}^2|} - \overline{|E_{0,y}^2|}}{\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|}} \quad (\text{II.102})$$

— степень линейной поляризации в осях x, y . Например, для поляризованного по x света имеем $\rho_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = 1$. Первый параметр Стокса,

$$\xi_1 = \frac{\overline{E_{0,x}E_{0,y}^*} + \overline{E_{0,y}E_{0,x}^*}}{\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|}} \quad (\text{II.103})$$

— степень линейной поляризации в осях x', y' , повернутых вокруг оси z на 45° относительно осей x, y (см. вставку в рис. 34). Это легко увидеть, написав, что

$$E_{0,x} = \frac{E_{0,x'} - E_{0,y'}}{\sqrt{2}}, \quad E_{0,y} = \frac{E_{0,x'} + E_{0,y'}}{\sqrt{2}}, \quad \overline{E_{0,x}E_{0,y}^*} + \overline{E_{0,y}E_{0,x}^*} = \overline{|E_{0,x'}|^2} - \overline{|E_{0,y'}|^2}, \quad (\text{II.104})$$

после чего выражение для ξ_1 в осях x', y' приобретает тот же вид, что и (II.102) для ξ_3 . Например, для поляризованного по x' света $\rho_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \xi_2 = 0, \xi_1 = 1$.

Оставшийся параметр Стокса — это степень циркулярной поляризации света в плоскости xy ,

$$\xi_2 = \frac{\overline{E_{0,y}E_{0,x}^*} - \overline{E_{0,x}E_{0,y}^*}}{i(\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|})} \equiv \frac{i(\overline{\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*})_z}{\overline{|E_{0,x}^2|} + \overline{|E_{0,y}^2|}} \quad (\text{II.105})$$

Действительно, если

$$\mathbf{E}(t) = \sqrt{2}(e_x \cos \omega t \pm e_y \sin \omega t) = \mathbf{E}_{0,\pm} e^{-i\omega t} + c.c., \quad \mathbf{E}_{0,\pm} = \frac{e_x \pm i e_y}{\sqrt{2}}, \quad (\text{II.106})$$

то можно получить, что $\xi_2 = \pm 1, \xi_1 = \xi_3 = 0$ (см. также рис. 30).

Определитель матрицы плотности $\det \rho = (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)/4$, а значит, сравнивая с (II.100), полную степень поляризации можно выразить через параметры Стокса,

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = P^2. \quad (\text{II.107})$$

Уравнение (II.107) можно рассматривать как условие того, что параметры Стокса лежат на т.н. *сфере Пуанкаре* радиуса P . Разные точки сферы Пуанкаре соответствуют разным поляризациям света. Сфера Пуанкаре для $P = 1$ показана на рис. 34.

В эксперименте гораздо легче измерять параметры Стокса напрямую, чем соотношение полуосей и угол поворота эллипса по которому поляризован свет. Для этого можно, например, пропустить свет сначала через линейный поляризатор по x и определить $\overline{|E_{0,x}^2|}$, а потом повернуть поляризатор и определить $\overline{|E_{0,y}^2|}$. Это сразу же позволит определить величину ξ_3 . Аналогично можно определить и ξ_1 . Поэтому поляризацию света как правило характеризуют именно параметрами Стокса.

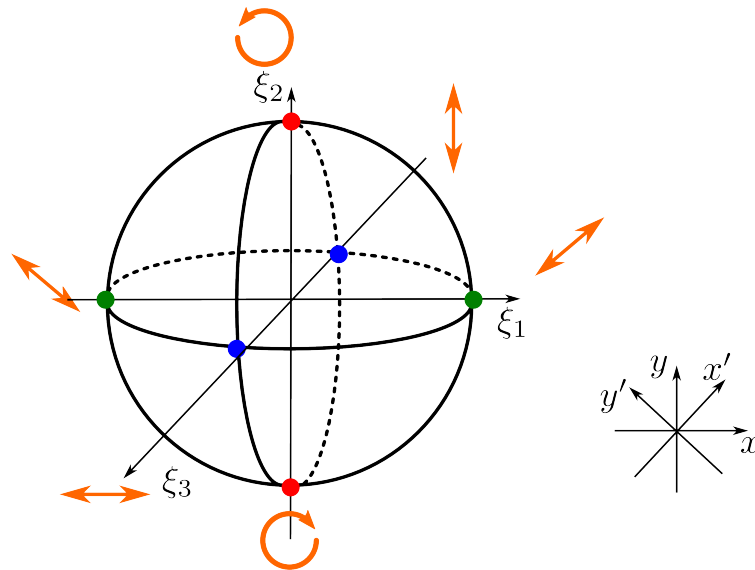


Рис. 34 Сфера Пуанкаре. Оранжевыми стрелками отмечена поляризация поля в характерных точках

Для управления поляризацией света можно пропускать его через пластинку из одноосного материала, см. рис. 35, так чтобы оптическая ось пластинки y' лежала в плоскости, перпендикулярной направлению распространения света z , и $\varepsilon_{x'x'} \neq \varepsilon_{y'y'}$. Тогда фазовые набег для обыкновенной и необыкновенной волн будут разными и можно преобразовывать линейную поляризацию в циркулярную, поворачивая пластинку вокруг оси z . В частности, если разность набегов фаз для обыкновенной и необыкновенной волн будет $\pi/2$ (что соответствует четверти длины волны), а угол поворота пластинки относительно вектора поляризации падающего света равен $\pm\pi/4$, то линейный свет будет преобразован в циркулярный.

Подробнее — см. задачу 16 из д/з.

D. Нелинейные оптические явления

Литература: R.W. Boyd, Nonlinear Optics, (Academic Press 2008), Chapter 1.

Нелинейная поляризуемость

До сих пор мы изучали явления, когда поляризация была линейной по электрическому полю, $P \propto E$. Вообще говоря, эта зависимость не обязана быть линейной.

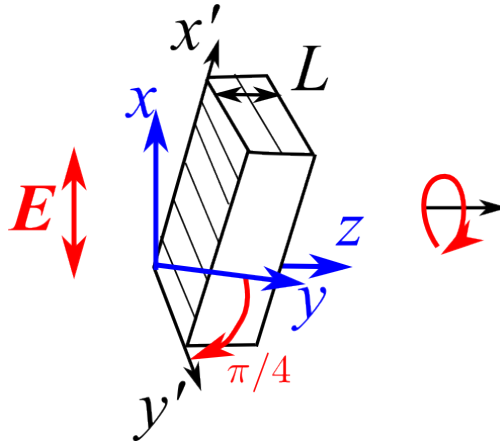


Рис. 35 Четвертьволновая пластинка

В больших электрических полях, которые можно создать лазером, могут стать существенными слагаемые следующего порядка в разложении восприимчивости по полю. Символически можно записать

$$P_{\alpha} = \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_{\beta} + \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_{\beta} E_{\gamma} + \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} E_{\beta} E_{\gamma} E_{\delta}, \quad (\text{II.108})$$

где введены *нелинейные оптические восприимчивости* второго и третьего порядка $\chi^{(2)}$ и $\chi^{(3)}$.

Порядок величины нелинейных восприимчивостей

Качественно, можно оценить их как

$$\chi^{(1)} \sim 1, \chi^{(2)} \sim 1/E_{at}, \chi^{(3)} \sim 1/E_{at}^2, \quad (\text{II.109})$$

где $E_{at} \sim e/a_B^2$ — характерное поле в атоме (a_B — боровский радиус). Оценка для χ_1 у нас была раньше, после формулы (I.47). Смысл остальных оценок в том, что нелинейные эффекты проявляются тогда, когда поле внутри атома существенно искажается волной. Подставляя числа получаем в СГС $E_{at} \sim (5 \times 10^{-10}) / (5 \times 10^{-9})^2 \sim 10^7 \text{ erg}^{1/2}/\text{cm}^{3/2}$, откуда $\chi^{(2)} \sim 10^{-7} \text{ cm}^{3/2}/\text{erg}^{1/2}$, $\chi_3 \sim 10^{-14} \text{ cm}^3/\text{erg}$. В системе СИ $E_{at} \sim e/(4\pi\epsilon_0 a_B^2) = 5 \times 10^{11} \text{ V/m}$, и $\chi^2 \sim 1 \text{ pm/V}$, $\chi^{(3)} \sim \text{pm}^2/\text{V}^2$. Для примера (Boyd, Table 1.5.3, p.50; Table 4.3.1, p.228), для GaAs $\chi^2 \sim 300 \text{ pm/V}$, для стекла $\chi^{(2)} \sim 0.1 \text{ pm/V}$, для алмаза $\chi^{(3)} \sim 0.2 \text{ pm}^2/\text{V}^2$.

Для таких больших полей нужен лазер (Ч. Таунс, Н. Г. Басов и А.М. Прохоров, мазер, 1954; Нобелевская премия 1964). Насколько большей интенсивности лазера со-

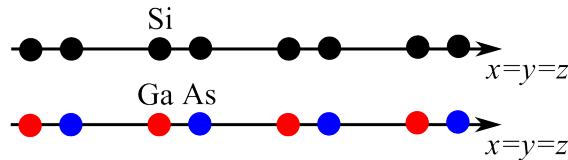


Рис. 36 Схема расположения атомов вдоль оси $x = y = z$ в кристалле Si и GaAs

ответствует такое поле? Плотность потока энергии

$$S_{at} \sim \frac{c}{4\pi} E_{at}^2 \sim 3 \times 10^{10} \frac{1}{10} \times 10^{14} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \sim 10^{23} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \sim 10^{16} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \sim 10^8 \frac{\text{W}}{\mu\text{m}^2}. \quad (\text{II.110})$$

Для сравнения, мощности лазерных указок обычно порядка 1 mW. Чтобы зажечь спичку достаточно 100 mW <https://youtu.be/woiTedSKPrk?t=65>.

Рекорды для импульсных лазеров: 500 ТВт в пучке диаметром 2 мм (т.е. как раз порядка S_{at}), <https://www.sciencedaily.com/releases/2012/07/120716134508.htm>, продолжительность импульса ~ 4 нс; см. также <http://www.ipfran.ru/science/base.html>. Для реализации таких лазеров используется методу усиления, разработанный в работе Donna Strickland and Gerard Mourou, “Compression of amplified chirped optical pulses” (Нобелевская премия по физике 2018 совместно с Артуром Ашкиным). Идея метода состоит в том, что импульс сначала растягивается по времени, затем проходит через усиливающую среду, и потом опять сжимается во времени.

Для перевода единиц между СИ и СГС есть полезный Appendix D в книжке Boyd-а, в частности таблица D.1 на стр. 603.

Симметричные свойства

В кристаллах с центром инверсии $\chi^{(2)} = 0$ (например, кремний), т.к. можно сделать замену переменных $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$. При этом E^2 знак не поменяет, а P — знак поменяет. Поэтому линейная связь $P \propto E^2$ в таких кристаллах невозможна. Эффект третьего порядка возможен в любых кристаллах. На рис. 36 показано схематическое расположение атомов вдоль направления $x = y = z$ в кремнии (есть центр инверсии, $\chi^{(2)} = 0$) и в GaAs (нет центра инверсии, $\chi^{(2)} \neq 0$).

Конкретный вид тензоров $\chi^{(2)}$ и $\chi^{(3)}$ зависит от симметрии кристалла. Например, для точечной симметрии тетраэдра T_d (как в GaAs) будет

$$\chi_{xyz}^{(2)} = \chi_{yxz}^{(2)} = \chi_{yzx}^{(2)} = \chi_{zyx}^{(2)} = \chi_{zxy}^{(2)} \neq 0, \quad (\text{II.111})$$

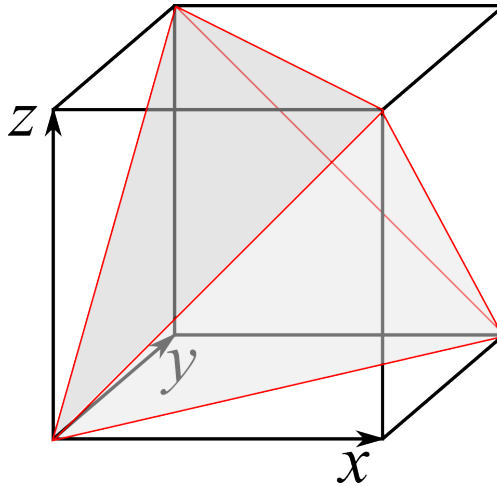


Рис. 37 Иллюстрация элементарной ячейки кубического кристалла симметрии T_d .

а остальные компоненты будут равны нулю, т.е.

$$P_x \propto 2\chi^{(2)} E_z E_y \quad P_y \propto 2\chi^{(2)} E_x E_z \quad P_z \propto 2\chi^{(2)} E_x E_y . \quad (\text{II.112})$$

(см Boyd, Table 1.5.2). Иллюстрация симметрии GaAs представлена на рисунке 37. Например, слагаемых $P_x \propto E_x E_y$ не может быть, т.к. при повороте кристалла на 180° вокруг оси z происходит трансформация $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $P_x \rightarrow -P_x$, $E_x E_y \rightarrow E_x E_y$ поэтому коэффициент перед ним равен нулю. По той же причине обнуляются коэффициенты при $P_x \propto E_x^2, E_y^2$.

Для кубической симметрии O^h (как в кремнии), $\chi^{(2)} \equiv 0$ и есть 4 независимых коэффициента в $\chi^{(3)}$:

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{yyyy}^{(3)} = \chi_{zzzz}^{(3)} \quad (\text{II.113})$$

$$\chi_{xxyy}^{(3)} = \chi_{yyxx}^{(3)} = \chi_{xxzz}^{(3)} = \chi_{zzxx}^{(3)} = \chi_{yyzz}^{(3)} = \chi_{zzyy}^{(3)} \quad (\text{II.114})$$

$$\chi_{xyxy}^{(3)} = \chi_{yxyx}^{(3)} = \chi_{xzzz}^{(3)} = \chi_{zzxx}^{(3)} = \chi_{yzyz}^{(3)} = \chi_{zyzy}^{(3)} \quad (\text{II.115})$$

$$\chi_{xyyx}^{(3)} = \chi_{yxxy}^{(3)} = \chi_{xzzx}^{(3)} = \chi_{zzxx}^{(3)} = \chi_{yzyy}^{(3)} = \chi_{zyyz}^{(3)} , \quad (\text{II.116})$$

(см Boyd, Table 1.5.4).

Виды нелинейных оптических эффектов

(а) связанные с $\chi^{(2)}$.

Запишем символически

$$E_1(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_1^* e^{i\omega_1 t}, E_2(t) = E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_2^* e^{i\omega_2 t}. \quad (\text{II.117})$$

Тогда

$$E_1(t)E_2(t) = [E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + \dots] + [E_1 E_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \dots]. \quad (\text{II.118})$$

Первые два слагаемых описывают *генерацию суммарной частоты* $\omega_1 + \omega_2$, а вторые два — генерацию разностной частоты $\omega_1 - \omega_2$.

В частном случае $\omega_1 = \omega_2$ получим *генерацию второй гармоники* $2\omega_1$ и *оптическое выпрямление*. Экспериментально обнаружено в работе [P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters and G. Weinreich, PRL **7**, 118 (1961), <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.7.118>]. В этой статье при подготовке к печати редактор случайно удалил главный результат с экспериментального рис. 1, сигнал второй гармоники, приняв его за пыль.

Для эффективной генерации второй гармоники нужно добиться условия *фазового синхронизма* $2k(\omega) = k(2\omega)$, где $k(\omega) = \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}/c$ — волновой вектор света. Действительно, при сложении двух фотонов в однородной среде законы сохранения энергии и импульса можно записать как

$$\omega + \omega = 2\omega, \quad (\text{II.119})$$

$$k(\omega) + k(\omega) = 2k(\omega) \neq k(2\omega). \quad (\text{II.120})$$

Из-за временной дисперсии проницаемости $\delta k = k(2\omega) - 2k(\omega) \neq 0$, что будет ослаблять эффект. Поэтому для толстых структур, толщиной больше чем обратная неопределенность волнового вектора $1/\delta k$, генерация будет подавлена. Однако, это можно компенсировать, например, рассматривая одноосный кристалл, и поворачивая его так, чтобы $2k_{\text{TE}}(\omega) = k_{\text{TM}}(2\omega)$, т.е. чтобы одноосность компенсировала временную дисперсию.

Зеленые лазерные указки работают как раз на второй гармонике — изначально генерируется свет инфракрасного диапазона, а затем частота удваивается, чтобы получить зеленый.

(б) связанные с $\chi^{(3)}$.

Пусть $E(t) = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t}$. Тогда

$$E^3(t) = (E_0^3 e^{-3i\omega t} + E_0^{*3} e^{3i\omega t}) + 3|E_0|^2 E(t). \quad (\text{II.121})$$

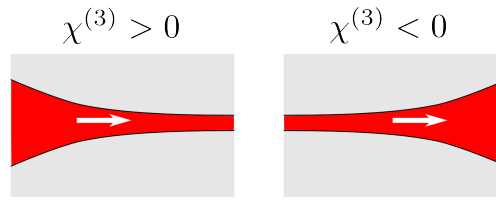


Рис. 38 Распространение пучка в фокусирующей и дефокусирующей средах

Первое слагаемое описывает эффект *генерации третьей гармоники*, а второе *нелинейный оптический эффект Керра*. Эффект Керра можно рассматривать как изменение показателя преломления волны в среде за счет нелинейности, $n = n_0 + n_2 I$, где I — интенсивность света. Действительно,

$$D = E + 4\pi P^{(1)} + 4\pi P^{(3)} = \varepsilon(E_0)(E_0^* e^{i\omega t} + c.c.), \quad \varepsilon(E_0) = 1 + 4\pi\chi^{(1)} + 12\pi\chi^{(3)}|E_0|^2. \quad (\text{II.122})$$

В зависимости от знака $\chi^{(3)}$, нелинейность бывает фокусирующей ($\chi^{(3)}, n_2 > 0$) и дефокусирующей ($\chi^{(3)}, n_2 < 0$), см. рис. 38. Качественно это можно понять на языке геометрической оптики — свет “заворачивает” в стороны большего показателя преломления. На другом языке — волна сама формирует себе эффективный волновод — область с большой ε .

Явление самофокусировки в нелинейной среде было предсказано Гургеном Аскарьяном в [G. A. Askar'yan, JETP **15** 943(1962); <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/r/42/5/p1360?a=list>] и независимо Чарльзом Таунсом с коллегами, [R. Y. Chiao, E. Garmire, C.H. Townes, Phys. Rev. Lett. **13**, 479 (1964), <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.479>]. Через 15 лет было обнаружено образование солитонов за счет самофокусировки, [J. E. Bjorkholm and A. A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **32**, 129(1974), <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.32.129>]. Возникает самофокусировка пороговым образом, при мощности больше чем $P_{\text{th}} \gtrsim \lambda^2/n_2$. Подробнее про самофокусировку и нелинейные волны см. книгу Кившарь Ю. С, Агравал Г. П. “*Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*”, М.: ФИЗМАТЛИТ (2005).

Для случая, когда взаимодействует несколько волн,

$$E_{1,2,3}(\mathbf{r}, t) = E_{1,2,3} e^{i\mathbf{k}_{1,2,3}\mathbf{r} - i\omega_{1,2,3}t} \quad (\text{II.123})$$

существует также явление *четырёхволнового смешивания*: описываемое вкладом в по-

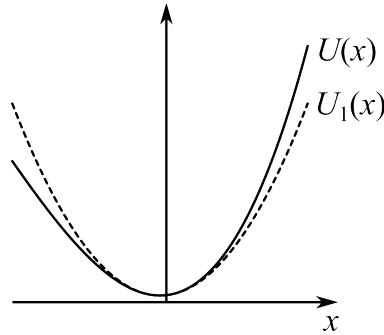


Рис. 39 Иллюстрация асимметричного потенциала (II.125).

ляризацию

$$P(\omega_3, \mathbf{r}) \propto (E_1 E_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t + i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)r} + c.c.) E_3 e^{i\mathbf{k}_3 r - i\omega_3 t} + c.c. \quad (\text{II.124})$$

Таким образом, генерируются волны с частотой $\omega_1 - \omega_2 + \omega_3$ и $\omega_2 - \omega_1 + \omega_3$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, соответственно. Наиболее прозрачно это явление при $\omega_1 = \omega_2$. Тогда можно сказать, что две волны 1 и 2 приводят к модуляции показателя преломления $E_1 E_2^* e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)r} + c.c.$, а третья волна рассеивается на этой модуляции, $\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$.

На этом же методе основана *голография* (Габор, 1947, Нобелевская премия 1971 г.). В этом случае $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2$ сначала фотопластинка облучается источником \mathbf{k}_1 и опорным лучом \mathbf{k}_2 , а затем, через некоторое время — еще раз опорным лучом \mathbf{k}_3 . Тогда поляризация будет с волновым вектором $\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$, как и у исходной волны.

Существуют также эффекты, связанные с *нелинейностями насыщения*, $\varepsilon(I) = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 I / (1 + \alpha I)$, где I — интенсивность лазера.

Отклик $\chi^{(2)}$ в модели среды как массива нелинейных осцилляторов

см. *Boyd, 1.4.1*

Нелинейную восприимчивость $\chi^{(2)}$ можно рассчитать для среды, состоящей из нелинейных осцилляторов с асимметричным потенциалом

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{max^3}{3}, \quad (\text{II.125})$$

см. рис. 39.

Тогда уравнение движения заряда q в электрическом поле $E = E_0 e^{-i\omega t} + c.c.$ будет

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + ax^2 = \frac{q}{m}(E_0 e^{-i\omega t} + c.c.). \quad (\text{II.126})$$

(для простоты мы рассматриваем одномерный случай и пренебрегаем векторностью полей).

Будем решать задачу методом теории возмущений по параметру a ,

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t), \quad x_0(t) \propto a^0, \quad x_1(t) \propto a^1. \quad (\text{II.127})$$

При $a = 0$ имеем

$$P^{(1)}(t) = qn x_0 \equiv \chi_0(\omega) E_0 e^{-i\omega t} + c.c., \quad \chi_0 = \frac{q^2 n}{m} G(\omega), \quad G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}. \quad (\text{II.128})$$

Здесь $P^{(1)}$ — линейный вклад в поляризацию, n — концентрация осцилляторов. При $\omega = 0$ ответ переходит в (I.47). Для квадратичного вклада получим

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -ax_0(t)^2 = -a \frac{q^2}{m^2} [E_0^2 e^{-2i\omega t} G^2(\omega) + c.c. + 2|G(\omega)|^2 |E_0|^2]. \quad (\text{II.129})$$

Таким образом, нелинейную поляризацию можно записать как

$$P^{(2)}(t) = qn x_1 = \chi^{(2)}(2\omega) E_0 e^{-2i\omega t} + c.c. + 2\chi^{(2)}(0) |E_0|^2, \quad (\text{II.130})$$

$$\chi^{(2)}(2\omega) = -a \frac{q^3 n}{m^2} G(2\omega) G(\omega)^2, \quad \chi^{(2)}(0) = -a \frac{q^3 n}{m^2} G(0) |G(\omega)|^2. \quad (\text{II.131})$$

III. Слоистые среды

A. Отражение волны, падающей на плоскую границу двух сред

Рассмотрим волну, падающую из среды 1 в среду 2, так что волновой вектор лежит в плоскости xz ($y \perp \mathbf{k}$), а диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z < 0 \\ \varepsilon_2, & z > 0. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

В этом случае в задаче можно выделить две независимые поляризации, $\sigma = \text{TE}$ и $\sigma = \text{TM}$, и для каждой поляризации представить электрическое поле в виде суперпозиции падающей и отраженной волн в среде 1 и прошедшей в среду 2 волны:

$$\mathbf{E}^{(\sigma)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} e^{ik_x x} (\mathbf{e}_1^{(\sigma)} e^{ik_{z,1} z} + r_{12} \mathbf{e}_1^{(\sigma)'} e^{-ik_{z,1} z}), & z < 0 \\ e^{ik_x x} t_{12} \mathbf{e}_2^{(\sigma)} e^{ik_{z,2} z}, & z > 0. \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Здесь

$$k_{z,1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - k_x^2}, \quad k_{1,2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{1,2}}, \quad (\text{III.3})$$

и мы воспользовались тем, что волновой вектор вдоль оси x в среде 1 и в среде 2 совпадает. Явный вид базисных векторов для двух поляризаций: ТЕ: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_y$, ТМ:

$$\mathbf{e}_1^{(\text{TM})} = \frac{\mathbf{e}_x k_{z,1} - \mathbf{e}_z k_x}{k_1}, \quad \mathbf{e}'_1^{(\text{TM})} = \frac{\mathbf{e}_x k_{z,1} + \mathbf{e}_z k_x}{k_1}, \quad \mathbf{e}_2^{(\text{TM})} = \frac{\mathbf{e}_x k_{z,2} - \mathbf{e}_z k_x}{k_2}, \quad (\text{III.4})$$

Эти базисные векторы выбраны из условия поперечности направления распространения и электрического поля.

Граничные условия имеют стандартный вид непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей:

$$E_y \Big|_{z \rightarrow -0} = E_y \Big|_{z \rightarrow +0}, \quad H_x \Big|_{z \rightarrow -0} = H_x \Big|_{z \rightarrow +0} \quad (\text{TE}) \quad (\text{III.5})$$

$$E_x \Big|_{z \rightarrow -0} = E_x \Big|_{z \rightarrow +0}, \quad H_y \Big|_{z \rightarrow -0} = H_y \Big|_{z \rightarrow +0} \quad (\text{TM}) \quad (\text{III.6})$$

$$E_y \Big|_{z \rightarrow -0} = E_y \Big|_{z \rightarrow +0}, \quad \frac{dE_y}{dz} \Big|_{z \rightarrow -0} = \frac{dE_y}{dz} \Big|_{z \rightarrow +0} \quad (\text{TE}) \quad (\text{III.7})$$

$$E_x \Big|_{z \rightarrow -0} = E_x \Big|_{z \rightarrow +0}, \quad \frac{dE_x}{dz} \Big|_{z \rightarrow -0} - \frac{dE_z}{dx} \Big|_{z \rightarrow -0} = \frac{dE_x}{dz} \Big|_{z \rightarrow +0} - \frac{dE_z}{dx} \Big|_{z \rightarrow +0} \quad (\text{TM}) \quad (\text{III.8})$$

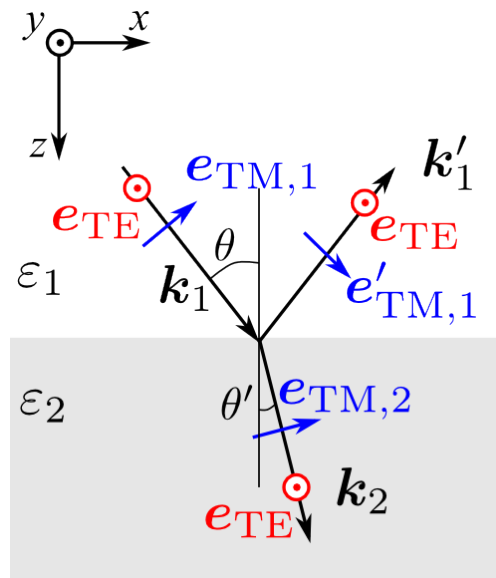


Рис. 40 Отражение плоской волны от границы раздела двух сред

Для двух поляризаций уравнения принимают вид

$$1 + r_{12}^{(TE)} = t_{12}^{(TE)} \quad (\text{III.9})$$

$$k_{z,1}(1 - r_{12}^{(TE)}) = k_{z,2}t_{12}^{(TE)} \quad (\text{III.10})$$

$$\cos \theta(1 + r_{12}^{(TM)}) = \cos \theta' t_{12}^{(TM)} \quad (\text{III.11})$$

$$k_1(1 - r_{12}^{(TM)}) = k_2 t_{12}^{(TM)} \quad (\text{III.12})$$

причем соотношение углов распространения по определению равняется

$$\frac{\cos \theta}{\cos \theta'} = \frac{k_{z,1}k_2}{k_{z,2}k_1}. \quad (\text{III.13})$$

Решая эти уравнения, находим

$$r_{12}^{(\sigma)} = \frac{Z_1^{(\sigma)} - Z_2^{(\sigma)}}{Z_1^{(\sigma)} + Z_2^{(\sigma)}}, \quad t_{12}^{(TE)} = 1 + r_{12}^{(TE)} = \frac{2Z_1^{(TE)}}{Z_1^{(TE)} + Z_2^{(TE)}}, \quad t_{12}^{(TM)} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}(1 + r_{12}^{(TM)}) \quad (\text{III.14})$$

где

$$Z_{1,2}^{(TE)} = k_{z,1,2}, \quad Z_{1,2}^{(TM)} = \frac{\varepsilon_{1,2}}{k_{z,1,2}}. \quad (\text{III.15})$$

Запишем вектор Пойнтинга для двух поляризаций

$$S_z^{(TE)} \propto \text{Re } E_y \frac{dE_y^*}{dz}, \quad S_z^{(TM)} \propto \text{Re } H_y E_x^* \propto \text{Re} \left(\frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} \right) E_x^* \quad (\text{III.16})$$

Для обеих поляризаций можно показать, что $S_z \propto k_z$. Таким образом, закон сохранения потока на границе непоглощающих сред принимает вид

$$k_{z,1}|r_{12}|^2 + k_{z,2}|t_{12}|^2 = k_{z,1}. \quad (\text{III.17})$$

Нормальное падение: $k_x = 0$, тогда $Z^{(TE)} = Z^{(TM)} = \sqrt{\varepsilon}$,

$$r_{12} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad t_{12} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \quad (\text{III.18})$$

Коэффициент отражения света в p поляризации на границе двух диэлектриков уменьшается с ростом угла падения. Видно, что при $k_{z,1}/k_{z,2} = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ получаем $r^{(TM)} = 0$. Этот угол называется углом Брюстера. Этот угол соответствует $\tan \theta = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$:

$$\frac{k_{z,1}}{k_{z,2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \rightarrow \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}, \quad \sin \theta \sqrt{\varepsilon_1} = \sin \theta' \sqrt{\varepsilon_2}, \Rightarrow \cos \theta' = \sqrt{1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2 \sin^2 \theta},$$

$$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos^2 \theta \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \quad (\text{III.19})$$

Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то при $\sin \theta > \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ окажется, что $k_{z,2}$ чисто мнимый, а $k_{z,1}$ – вещественный — т.е. волна не сможет распространяться в среде 2. Тогда $|r| = 1$ для обеих поляризаций, и реализуется условие *полного внутреннего отражения*.

Существенный момент для ТМ поляризации: базисный вектор разный для падающей и отраженной волн. В данном случае они специально выбраны таким образом, чтобы $e_{1,x}^{\text{TM}} = e_{1,x}^{\text{TM}'}$. Поэтому при нормальном падении коэффициенты отражения для ТЕ и ТМ поляризаций будут совпадать. Иногда базисные векторы для ТМ поляризации выбирают иначе, что может привести к расхождениям в конечных ответах, например, другому знаку коэффициента отражения. Кроме того, нужно отслеживать определение коэффициента пропускания в ТМ поляризации. Иногда удобно вместо (III.2) определить поле в ТМ поляризации как

$$\mathbf{E}^{(TM)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\cos \theta} e^{ik_x x} (e_1^{(TM)} e^{ik_{z,1} z} + r_{12}^{(TM)} e_1^{\text{TM}'}) e^{-ik_{z,1} z}, & z < 0 \\ \frac{1}{\cos \theta'} e^{ik_x x} \tilde{t}_{12}^{(TM)} e_2^{(TM)} e^{ik_{z,2} z}, & z > 0. \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

При таком выборе коэффициент отражения не поменяется, а в коэффициенте пропускания в ТМ поляризации в (III.14) пропадет множитель $\cos \theta / \cos \theta'$,

$$\tilde{t}_{12}^{(TM)} = 1 + r_{12}^{(TM)}. \quad (\text{III.21})$$

Он будет иметь смысл не коэффициента пропускания амплитуды электрического поля волны, а коэффициента пропускания x -компоненты электрического поля. Например, такой выбор удобнее для метода матриц переноса, который далее будет записываться как раз в базисе E_x, H_y . Поэтому определения коэффициентов отражения и пропускания для ТМ поляризации нужно всегда внимательно отслеживать.

Поверхностный плазмон-поляритон

В спектре отражения ТМ поляризованного света есть особенность при

$$Z_1^{(TM)} = -Z_2^{(TM)}, \quad \frac{\varepsilon_1}{k_{z,1}} = -\frac{\varepsilon_2}{k_{z,2}}, \quad (\text{III.22})$$

т.е.

$$k_x \equiv k_{SPP}(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \quad (\text{III.23})$$

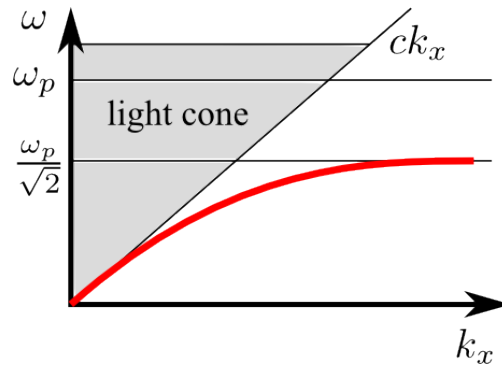


Рис. 41 Дисперсия поверхностного плазмон-поляритона

Выражение (III.23) для границы диэлектрика и металла описывает дисперсию поверхностного плазмон-поляритона (surface plasmon-polariton). На рис. 41 дисперсия $k_x(\omega)$ построена схематически при $\varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, $\varepsilon_1 = 1$. На больших волновых векторах частота плазмон-поляритона равняется $\omega_p/\sqrt{2}$, что совпадает с ответом (I.106) для поверхностного плазмона, полученным ранее в электростатическом пределе (большие волновые векторы соответствуют маленьким длинам, а значит, запаздывание несущественно). Новый ответ (III.23) получен уже с учетом запаздывания. Слово “поляритон” в названии как раз это и символизирует, хотя часто его опускают и говорят просто, что (III.23) описывает дисперсию поверхностного плазмона.

Поверхностный плазмон — это собственное колебание, т.е. может существовать и без внешнего поля. Действительно, при $Z_1^{(TM)} = -Z_2^{(TM)}$ имеем $r_{12}^{(TM)} = t_{12}^{(TM)} = \infty$, т.е. граничные условия (III.11) выполняются и без падающей волны. Волна является поверхностной, т.к. как видно из рисунка и (III.23) $|k_x| > \omega/c$, а значит, $k_{z,1}$ и $k_{z,2}$ будут чисто мнимыми, т.е. электрическое поле будет затухать при удалении от границы $\propto e^{\text{Im } k_{z,1}|z|}, e^{-\text{Im } k_{z,2}|z|}$.

Поляризация поверхностного плазмона Рассмотрим поляризацию поверхностного плазмона, распространяющегося вдоль оси x . Формально поверхностный плазмон — это ТМ поляризованная волна, поэтому можно было бы ожидать линейной поляризации. Однако, поскольку $k_x > \omega/c$, в диэлектрике волновой вектор $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2}$ будет комплексным, а значит, комплексным будет и вектор поляризации (III.4), пропорциональный $k_z \mathbf{e}_x - k_x \mathbf{e}_z$. В частности, при $k_x \gg \omega/c$ получим, что $\mathbf{e}_{TM} \propto \mathbf{e}_x + \text{sign } k_x i \mathbf{e}_z$

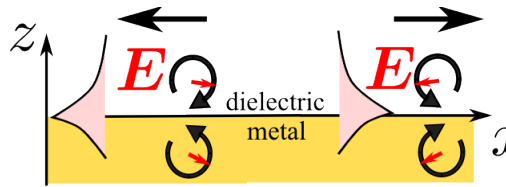


Рис. 42 Поляризация электрического поля поверхностного плазмона в зависимости от направления распространения

— то есть электрическое поле $\mathbf{E} \propto \text{Re} \mathbf{e}_{TM} e^{-i\omega t}$ будет вращаться в плоскости xz . Знак вращения зависит от направления распространения, при этом в металле знак будет противоположным — см. рис. 42. В отличие от циркулярно поляризованных волн в вакууме, плоскость, в которой происходит вращение поля плазмона, содержит направление распространения x , а не перпендикулярна ему. Поэтому иногда говорят, что плазмоны переносят “поперечный спин”. Это явление можно использовать для направленного возбуждения плазмонов. Излучатель, например, квантовая точка, циркулярно поляризованный в плоскости xz , будет излучать плазмоны направленно вдоль x или $-x$ в зависимости от знака циркулярной поляризации, см [обзор](#) и [статью](#).

Возбуждение плазмонов На плоской границе выполняется закон сохранения импульса вдоль границы. Поэтому поверхностный плазмон внешней плоской волной не возбудить — для плазмона $k_x > \omega/c$ а для волны $|k_x| < \omega/c$. Иногда область $k_x^2 + k_y^2 < \omega^2/c^2$ называют “световым конусом” (серая область на рис. 41). Если же на границу поместить неоднородность (дифракционную решетку, наночастицу, и т.д.), то плазмон можно возбудить и плоской волной. Тогда недостающий импульс будет передан решетке или частице. В частности, для дифракционной решетки с периодом d условие возбуждения поверхностного плазмона запишется как

$$\frac{\omega}{c} \sin \theta - k_{SPP}(\omega) = \pm \frac{2\pi}{d}, \pm \frac{4\pi}{d} \dots \quad (\text{III.24})$$

В. Многослойные системы

1. Метод матриц переноса

Перейдем к рассмотрению систем с несколькими слоями. Для этого удобно использовать *метод матриц переноса*.

Запишем в пределах каждого плоского слоя электрическое и магнитное поля в виде

$$E_x = Ae^{ikz} + Be^{-ikz}, \quad H_y = -i\frac{c}{\omega} \frac{dE_x}{dz} = n(Ae^{ikz} - Be^{-ikz}), \quad (\text{III.25})$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда

$$A = \frac{E_x(0) + H_y(0)/n}{2}, \quad B = \frac{E_x(0) - H_y(0)/n}{2}, \quad (\text{III.26})$$

и распространение через слой можно описать матрицей переноса T :

$$\begin{pmatrix} E_x(z) \\ H_y(z) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} E_x(0) \\ H_y(0) \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \cos kz & \frac{i}{n} \sin kz \\ in \sin kz & \cos kz \end{pmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Отметим, что $\det T = 1$. На границах раздела сред поля E_x и H_y непрерывны. Поэтому матрицу переноса через комбинированную структуры 1 + 2 + 3 можно получить как произведению матриц переноса через ее компоненты,

$$T(1 + 2 + 3) = T_3 T_2 T_1. \quad (\text{III.28})$$

Важно: матрицы переноса перемножаются в обратном порядке, см. рис. 43,

$$\begin{pmatrix} E_x(z_3) \\ H_y(z_3) \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} E_x(z_2) \\ H_y(z_2) \end{pmatrix} = T_3 T_2 \begin{pmatrix} E_x(z_1) \\ H_y(z_1) \end{pmatrix} = T_3 T_2 T_1 \begin{pmatrix} E_x(z_0) \\ H_y(z_0) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.29})$$

Как получить коэффициенты отражения света от структуры, зная матрицу переноса через нее? Для этого надо представить поле слева как суперпозицию падающей и отраженной волн, а справа — как прошедшую волну. Поля слева и справа будут связаны матрицей переноса, что дает

$$T \begin{pmatrix} 1 + r \\ n(1 - r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ nt \end{pmatrix}, \quad (\text{III.30})$$

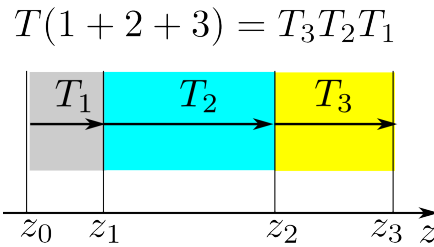


Рис. 43 Матрицы переноса

где r и t — коэффициенты отражения и пропускания, соответственно (эти уравнения очень похожи на (III.9)). Решая эту систему уравнений, можно получить

$$r = \frac{T_{1,2}n^2 + (T_{1,1} - T_{2,2})n - T_{2,1}}{T_{1,2}n^2 - (T_{1,1} + T_{2,2})n + T_{2,1}}, \quad t = -\frac{2n}{T_{1,2}n^2 - (T_{1,1} + T_{2,2})n + T_{2,1}}. \quad (\text{III.31})$$

Теперь мы умеем рассчитывать коэффициенты отражения и пропускания произвольной многослойной системы.

Матрицы переноса можно применять и для наклонного распространения, в этом случае они будут зависеть от поляризации волны:

$$\text{для плоской волны } \propto e^{ik_z z} \text{ имеем } \frac{H_y}{E_x} = \begin{cases} \frac{ck_z}{\omega}, & (\text{TE}) \\ \frac{c\varepsilon}{\omega k_z}, & (\text{TM}), \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

поэтому

$$T_{\text{TE}} = \begin{pmatrix} \cos k_z z & \frac{i\omega}{k_z c} \sin k_z z \\ i\frac{ck_z}{\omega} \sin k_z z & \cos k_z z \end{pmatrix}, \quad T_{\text{TM}} = \begin{pmatrix} \cos k_z z & \frac{ik_z c}{\varepsilon \omega} \sin k_z z \\ i\frac{c\varepsilon}{\omega k_z} \sin k_z z & \cos k_z z \end{pmatrix} \quad (\text{III.33})$$

2. Слоистые периодические среды

Наша цель — получить явный вид закона дисперсии блоховских волн в слоистой среде $1/2/1/2/1/2 \dots$. Элементарная ячейка структуры образована двумя слоями с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 и толщинами d_1 и d_2 , соответственно. Ось z направлена перпендикулярно слоям.

Согласно теореме Блоха, решение внутри среды имеет общий вид

$$\mathbf{E}_{K_z}(z, x, y) = e^{iK_z z + ik_x x + ik_y y} \mathbf{u}_{K_z}(z), \quad \mathbf{u}_{K_z}(z + d) = \mathbf{u}_{K_z}(z) \quad (\text{III.34})$$

где K_z — блоховский вектор, а $\mathbf{u}_{K_z}(z+d)$ — периодическая блоховская амплитуда. Из-за трансляционной инвариантности вдоль x и y зависимость поля от этих координат такая же, как и в вакууме.

Наша цель — определить закон дисперсии $K_z(\omega, k_x, k_y)$ (в вакууме было бы $K_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2}$). Для этого можно напрямую воспользоваться теоремой Блоха в методе матриц переноса. Дисперсия блоховских волн:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} (z+d) = T \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} (z) = e^{iK_z d} \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} (z) \quad (\text{III.35})$$

Уравнение на собственные значения $\det(T - e^{iKd}) = 0$ можно привести к виду

$$\cos Kd = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} \quad (\text{III.36})$$

где мы учли, что $\det T = 1$.

Осталось посчитать матрицу переноса через период структуры $T = T_2 T_1$, перемножая матрицы переноса отдельных слоев (III.33). В случае нормального падения ($k_x = k_y = 0$) матрица переноса принимает вид

$$T = \begin{pmatrix} \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 - \frac{n_2}{n_1} \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2 & \dots \\ \dots & \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 - \frac{n_1}{n_2} \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.37})$$

Нас интересуют пока лишь диагональные элементы, т.к. именно они входят в закон дисперсии (III.36). Итак, получаем закон дисперсии

$$\cos K_z d = \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2. \quad (\text{III.38})$$

Для однородной среды с $n_1 = n_2$, \rightarrow , имеем $\cos K_z d = \cos k_z d$, т.е. блоховский вектор совпадает с волновым вектором в среде с точностью до целого кратного $2\pi/d$ (т.е. номера зоны Бриллюэна).

В случае произвольного угла падения закон дисперсии зависит от поляризации волны. Для ТЕ поляризации имеем

$$\cos K_{z, \text{TE}} d = \cos k_{z,1} d_1 \cos k_{z,2} d_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z,1}}{k_{z,2}} + \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}} \right) \sin k_{z,1} d_1 \sin k_{z,2} d_2, \quad (\text{III.39})$$

а для ТМ получаем

$$\cos K_{z, \text{TM}} d = \cos k_{z,1} d_1 \cos k_{z,2} d_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z,1} \varepsilon_2}{\varepsilon_1 k_{z,2}} + \frac{k_{z,2} \varepsilon_1}{k_{z,1} \varepsilon_2} \right) \sin k_{z,1} d_1 \sin k_{z,2} d_2. \quad (\text{III.40})$$

Здесь $k_{z,1,2}^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon_{1,2} - k_x^2 - k_y^2$.

Приближение эффективной среды

Пусть толщины слоев таковы, что все фазовые набегии малы, $kd \ll 1$. Тогда правую и левую часть закона дисперсии можно разложить в ряд Тейлора по малому параметру:

$$1 - \frac{(K_z^{(\text{TE})}d)^2}{2} = 1 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{d_1^2 \varepsilon_1}{2} + \frac{d_2^2 \varepsilon_2}{2}\right) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right) d_1 d_2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \frac{k_x^2}{2} (d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2) = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] (d_1 \varepsilon_1 + d_2 \varepsilon_2) (d_1 + d_2) + \frac{k_x^2 d^2}{2} \quad (\text{III.41})$$

Окончательно находим

$$K_z^{(\text{TE})2} + k_x^2 + k_y^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon_{\text{eff},xx}, \quad \varepsilon_{\text{eff},xx} = \frac{d_1 \varepsilon_1 + d_2 \varepsilon_2}{d_1 + d_2}. \quad (\text{III.42})$$

Аналогично для ТМ поляризации

$$1 - \frac{(K_z^{(\text{TM})}d)^2}{2} = 1 - \left(\frac{d_1^2 k_{z,1}^2}{2} + \frac{d_2^2 k_{z,2}^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z,1} \varepsilon_2}{\varepsilon_1 k_{z,2}} + \frac{k_{z,2} \varepsilon_1}{k_{z,1} \varepsilon_2}\right) k_{z,1} k_{z,2} d_1 d_2 \quad (\text{III.43})$$

$$K_z^{(\text{TM})2} = \left(\frac{d_1^2 k_{z,1}^2}{d^2} + \frac{d_2^2 k_{z,2}^2}{d^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z,1}^2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{k_{z,2}^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \frac{d_1 d_2}{d^2} \quad (\text{III.44})$$

$$K_z^{(\text{TM})2} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 d_1^2 + \varepsilon_2 d_2^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d_1 d_2}{d^2} - (k_x^2 + k_y^2) \frac{d_1^2 + d_2^2 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1) d_1 d_2 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2) d_1 d_2}{d^2} \quad (\text{III.45})$$

$$K_z^{(\text{TM})2} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\text{eff},xx} - (k_x^2 + k_y^2) \frac{\varepsilon_{\text{eff},xx}}{\varepsilon_{\text{eff},zz}}. \quad (\text{III.46})$$

$$\frac{K_z^{(\text{TM})2}}{\varepsilon_{\text{eff},zz}} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_{\text{eff},xx}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2, \quad \varepsilon_{\text{eff},xx} = \frac{d_1 \varepsilon_1 + d_2 \varepsilon_2}{d_1 + d_2}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\text{eff},zz}} = \frac{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}{d_1 + d_2}. \quad (\text{III.47})$$

Сравнивая (III.42), (III.47) с законами дисперсии в одноосной среде (II.21), (II.25) видим, что он эквивалентен закону дисперсии в *однородной* среде с проницаемостями $\varepsilon_{\text{eff},zz}$ и $\varepsilon_{\text{eff},xx} = \varepsilon_{\text{eff},yy}$. Поэтому такое приближение, когда слоистая среда заменяется на эффективную одноосную, называется приближением эффективной среды. Фактически, мы провели повторное усреднение — сначала перешли от дискретной решетки атомов к макроскопической электродинамике и ввели $\varepsilon_{1,2}$, а потом усреднили слои и перешли к проницаемостям ε_{eff} , см. рис. 44.

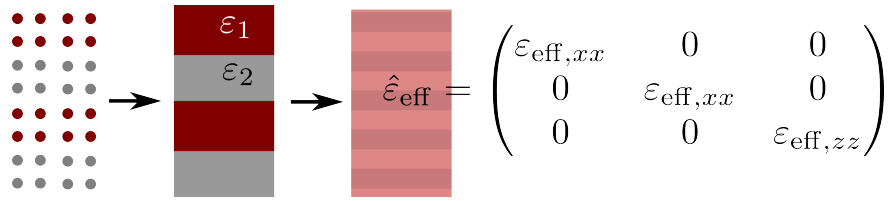


Рис. 44 Иллюстрация перехода к эффективным диэлектрическим проницаемостям в слоистой среде

Эти же проницаемости можно получить и проще, без матриц переноса, просто вычисляя соотношение компонент векторов $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}_{\text{eff}} \mathbf{E}$ и \mathbf{E} , усредненных по слоям:

$$\epsilon_{\text{eff},xx} = \frac{d_1 D_{x,1} + d_2 D_{x,2}}{d_1 E_{x,1} + d_2 E_{x,2}} = \frac{\epsilon_1 d_1 E_x + \epsilon_2 d_2 E_x}{d_1 E_x + d_2 E_x} = \frac{d_1 \epsilon_1 + d_2 \epsilon_2}{d_1 + d_2}. \quad (\text{III.48})$$

Здесь мы воспользовались тем, что на плоской границе слоев 1 и 2 тангенциальная компонента вектора \mathbf{E} , E_x , сохраняется. Аналогично

$$\epsilon_{\text{eff},zz} = \frac{d_1 D_{z,1} + d_2 D_{z,2}}{d_1 E_{z,1} + d_2 E_{z,2}} = \frac{d_1 D_z + d_2 D_z}{d_1 D_z / \epsilon_1 + d_2 D_z / \epsilon_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 / \epsilon_1 + d_2 / \epsilon_2}, \quad (\text{III.49})$$

где было использовано сохранение нормальной компоненты вектора \mathbf{D} .

Одномерный фотонный кристалл

Теперь будем считать толщины слоев произвольными и выйдем за рамки модели эффективной среды.

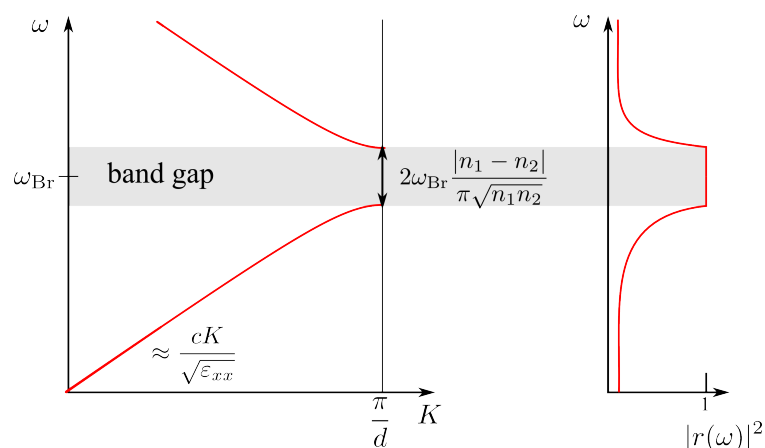


Рис. 45 Схематическое изображения (а) закона дисперсии и (б) спектра отражения в одномерном фотонном кристалле

Фотонный кристалл — структура, в которой диэлектрическая проницаемость периодически изменяется в пространстве с периодом порядка длины световой волны, так что возможна брэгговская дифракция света. Слоистые структуры рассматривали давно, как минимум — с 50-х годов. Понятие фотонного кристалла появилось просле работ [E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059-2062 (1987); S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486-2489 (1987)]. При этом основные идеи содержались уже в менее известной но более ранней работе [В. П. Быков, ЖЭТФ **35**, 269 (1972)].

Брэгговское условие

$$\frac{\omega}{c}(\sqrt{\varepsilon_1}d_1 + \sqrt{\varepsilon_2}d_2) = \pi, \omega = \omega_{\text{Br}} = \frac{c\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}d_1 + \sqrt{\varepsilon_2}d_2} \quad (\text{III.50})$$

где ω_{Br} — брэгговская частота.

Пусть толщины слоев подобраны так, что выполняется дополнительное условие

$$\frac{\omega_{\text{Br}}}{c} \sqrt{\varepsilon_1}d_1 = \frac{\omega_{\text{Br}}}{c} \sqrt{\varepsilon_2}d_2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{III.51})$$

(т.е. толщина каждого слоя — четверть длины волны в этом слое на брэгговской частоте). Разложим точный закон дисперсии блоховских волн (III.38) по малому параметру Ω — безразмерной отстройке от брэгговского резонанса:

$$k_1d_1 = \frac{\pi}{2}(1 + \Omega) = k_2d_2 = \frac{\pi}{2}(1 + \Omega), \quad \Omega = \frac{\omega - \omega_{\text{Br}}}{\omega_{\text{Br}}}, \quad |\Omega| \ll 1. \quad (\text{III.52})$$

$$\cos k_1d_1 \cos k_2d_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \Omega^2, \sin k_1d_1 \sin k_2d_2 \approx 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \Omega^2, \quad (\text{III.53})$$

и вместо (III.38) получаем

$$\frac{(Kd - \pi)^2}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) + \frac{\pi^2 \Omega^2 (n_1 + n_2)^2}{8n_1n_2} = -1 - \frac{1}{2} \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1n_2} + \frac{\pi^2 \Omega^2 (n_1 + n_2)^2}{8n_1n_2}. \quad (\text{III.54})$$

Далее воспользуемся условием *малого диэлектрического контраста*, т.е. будем считать, что $|n_1 - n_2| \ll n_1, n_2$:

$$(K_z d - \pi)^2 = \pi^2 \frac{(\omega - \omega_{\text{Br}})^2}{\omega_{\text{Br}}^2} - \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 n_2} \quad (\text{III.55})$$

Этот же ответ можно переписать в виде

$$K_{z,\pm} = \frac{\pi}{d} \left(1 \pm \sqrt{\frac{(\omega - \omega_{\text{Br}})^2}{\omega_{\text{Br}}^2} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{Br}}}\right)^2} \right), \quad \Delta\omega = \frac{n_1 - n_2}{\pi \sqrt{n_1 n_2}} \omega_{\text{Br}} \approx \frac{n_1 - n_2}{\pi n_1} \omega_{\text{Br}}. \quad (\text{III.56})$$

где введена полуширина запрещенной зоны $\Delta\omega$. В области внутри запрещенной зоны вещественным ω будут соответствовать комплексные K . Поэтому волна, падающая на фотонный кристалл, будет затухать внутрь структуры, и отражаться наружу. Чем толще структура, тем больше коэффициент отражения. В пределе бесконечной структуры без потерь коэффициент отражения будет стремиться к единице. Соответствие зонной структуры и спектра отражения от бесконечной структуры показано на рис. 45.

Метод плоских волн. Двухволновое приближение

Попробуем теперь воспроизвести закон дисперсии (III.56) другим путём, без использования метода матриц переноса. Волновое уравнение для электрического поля имеет вид

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(z) E = 0, \quad \varepsilon(z+d) = \varepsilon(z), \quad \varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & |z| < d_1/2 \\ \varepsilon_2, & d_1/2 < |z| < d/2. \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

Будем искать решение в виде суперпозиции плоских волн

$$E_K(z) = e^{iKz} \sum_{h=-\infty}^{\infty} E_h e^{2\pi i h z / d}. \quad (\text{III.58})$$

Это соответствует разложению периодической блоховской амплитуды в ряд Фурье, $\sum_{h=-\infty}^{\infty} E_h e^{2\pi i h z / d}$. Подставляя (III.58) в (III.57), получаем систему уравнений для гармоник электрического поля $E_{h'}$.

$$-\left(K + \frac{2\pi h}{d}\right)^2 E_h + \sum_{h'} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon^{(h-h')} E_{h'} = 0 \quad (\text{III.59})$$

Если среда однородна ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), то все гармоники в системе (III.59) независимы, $\varepsilon^{(h-h')} \propto \delta_{h,h'}$ а соответствующие им частоты равны

$$\omega_h(K) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}} \left| K + 2h \frac{\pi}{d} \right|, \quad (\text{III.60})$$

пунктирные прямые на рис. 46. В неоднородной среде возможна брэгговская дифракция, приводящая к гибридизации гармоник с разными h . Сила дифракции характеризуется компонентами Фурье диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon^{(h-h')} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dz e^{-2\pi i (h-h') z / d} \varepsilon(z) = \varepsilon_2 \delta_{h,h'} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{\sin[\pi(h-h')d_1/d]}{\pi(h-h')}. \quad (\text{III.61})$$

Будем искать решение в области спектра вблизи брэгговской частоты

$$\omega \approx \omega_{\text{Br}} = \frac{c\pi}{d\sqrt{\varepsilon^{(0)}}}, \quad (\text{III.62})$$

(здесь $\varepsilon^{(0)} \equiv \int_{-d/2}^{d/2} \varepsilon(z) dz/d$ по определению — средняя диэлектрическая проницаемость).

При этом нас интересует волновой вектор K вблизи края зоны Бриллюэна, $K \approx \pi/d$. В однородной среде $\varepsilon^{(h-h')} \propto \delta_{h,h'}$ и различны. Тогда во всем решении (III.58) достаточно оставить только те пространственные гармоники E_h , для которых волновые вектора по модулю близки к π/d , так что соответствующие им частоты близки,

$$\omega_h(K) \approx \omega_{\text{Br}} \text{ при } K \approx \frac{\pi}{d} \Rightarrow h = 0, -1. \quad (\text{III.63})$$

Все это очень похоже на теорию возмущений для вырожденного уровня в квантовой механике. При $K = \pi/d$ уровень на частоте ω_{Br} двукратно вырожден, а брэгговская дифракция приводит к снятию вырождения, см. рис. 46.

Итак, из ряда (III.58) остаются лишь два слагаемых, слагаемое E_0 с волновым вектором $K \approx \pi/d$ и слагаемое E_{-1} с волновым вектором $K - 2\pi/d \approx -\pi/d$, т.е.

$$E_K(z) = e^{iKz}(E_0 + E_{-1}e^{-2\pi iz/d}), \quad (\text{III.64})$$

а вместо (III.59) находим

$$[\varepsilon^{(0)}(\omega/c)^2 - (K - 2\pi/d)^2]E_{-1} + (\omega/c)^2\varepsilon^{(1)}E_0 = 0 \quad (\text{III.65})$$

$$(\omega/c)^2\varepsilon^{(1)}E_{-1} + [\varepsilon^{(0)}(\omega/c)^2 - K^2]E_0 = 0. \quad (\text{III.66})$$

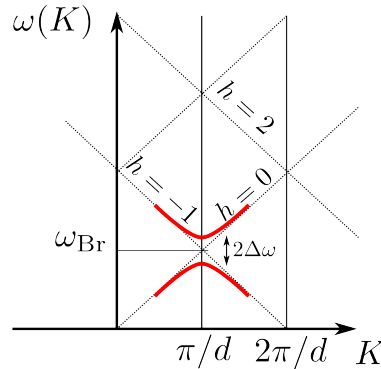


Рис. 46 Расщепление спектра вблизи края зоны Бриллюэна в двухволновом приближении

Теперь заметим, что

$$\varepsilon^{(0)}(\omega/c)^2 - K^2 = (\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\omega/c - K)(\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\omega/c + K) \approx (\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\omega/c - K) \times 2\omega_{\text{Br}}\sqrt{\varepsilon^{(0)}}/c, \quad (\text{III.67})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(\omega/c)^2 - (K - 2\pi/d)^2 &= [\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\omega/c - K + 2\pi/d][\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\omega/c + K - 2\pi/d] \approx \\ &\approx 2\omega_{\text{Br}}\sqrt{\varepsilon^{(0)}}/c[\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\omega/c + K - 2\pi/d] \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

и поделим все на $2\omega_{\text{Br}}\sqrt{\varepsilon^{(0)}}/c$. В итоге система приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{d} - \sqrt{\varepsilon^{(0)}}\frac{\omega}{c} & -\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\frac{\Delta\omega}{c} \\ \sqrt{\varepsilon^{(0)}}\frac{\Delta\omega}{c} & \sqrt{\varepsilon^{(0)}}\frac{\omega}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{-1} \\ E_0 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} E_{-1} \\ E_0 \end{pmatrix}, \quad \Delta\omega = \frac{\varepsilon^{(1)}}{2\varepsilon^{(0)}}\omega_{\text{Br}}. \quad (\text{III.69})$$

Из системы (III.69) находим собственные числа

$$K_{\pm} = \frac{\pi}{d} \pm Q, \quad Q = \frac{\pi}{d} \frac{\sqrt{(\omega - \omega_{\text{Br}})^2 - \Delta\omega^2}}{\omega_{\text{Br}}}. \quad (\text{III.70})$$

Осталось показать что этот ответ совпадает с (III.56). Для этого нужно получить явное выражение для $\Delta\omega$ из (III.69) при $n_1d_1 = n_2d_2$ и сравнить его с тем, что в (III.56).

Для $n_1d_1 = n_2d_2$, $d_1 \approx d_2 = d/2$ имеем $\sin(\pi d_1/d) = \sin(\pi/2) = 1$ и для $h - h' = 1$ находим компоненту Фурье (III.61)

$$\varepsilon^{(1)} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{1}{\pi}. \quad (\text{III.71})$$

Тогда

$$\Delta\omega = \omega_{\text{Br}} \frac{\varepsilon^{(1)}}{2\varepsilon^{(0)}} \approx \omega_{\text{Br}} \frac{n_1^2 - n_2^2}{2\pi n_1^2} \approx \omega_{\text{Br}} \frac{n_1 - n_2}{\pi n_1}. \quad (\text{III.72})$$

Тем самым доказано, что ответы, полученные методом матриц переноса и двухволновым приближением метода плоских волн (III.56) и (III.70), эквивалентны при $|n_1 - n_2| \ll n_1, n_2$.

Коэффициент отражения в двухволновом приближении

Для расчета коэффициента отражения нам потребуется явный вид блоховских решений:

$$E_{\pm}(z) = e^{iK_{\pm}z} + \xi_{\pm} e^{i(K_{\pm} - 2\pi/d)z}, \quad (\text{III.73})$$

Здесь

$$\xi_{\pm} = \frac{E_{-1}}{E_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} \frac{\Delta\omega}{c}}{\frac{2\pi}{d} - \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \frac{\omega}{c} - K_{\pm}} \equiv \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{Br}} - \omega \mp \sqrt{(\omega_{\text{Br}} - \omega)^2 - \Delta\omega^2}}, \quad (\text{III.74})$$

где мы воспользовались первым уравнением системы (III.69) для связи E_{-1} и E_0 , а также подставили в явном виде K_{\pm} из (III.70).

Рассматривается отражение от структуры длиной L помещенной в матрицу с проницаемостью $\varepsilon^{(0)}$. Электрическое поле представим в виде падающей и отраженной волн слева, блоховских мод (III.73) внутри и прошедшей волны справа:

$$E(z) = \begin{cases} e^{i\omega\sqrt{\varepsilon^{(0)}}z/c} + r e^{-i\omega\sqrt{\varepsilon^{(0)}}z/c}, & z < 0 \\ A_+ E_+(z) + A_- E_-(z), & 0 < z < L \\ t e^{i\omega\sqrt{\varepsilon^{(0)}}(z-L)/c}, & z > L. \end{cases} \quad (\text{III.75})$$

Будем считать, что $\omega\sqrt{\varepsilon^{(0)}}/c \approx K_{\pm} \approx \pi/d$, так что

$$\frac{d}{dz} E_{\pm}(z) = i \frac{\pi}{d} (e^{iK_{\pm}z} - \xi^{(\pm)} e^{i(K_{\pm} - 2\pi/d)z}). \quad (\text{III.76})$$

Граничные условия при $z = 0$ состоят в непрерывности E и dE/dz :

$$1 + r = A_+(1 + \xi_+) + A_-(1 + \xi_-) \quad (\text{III.77})$$

$$1 - r = A_+(1 - \xi_+) + A_-(1 - \xi_-) \quad (\text{III.78})$$

Отсюда находим

$$1 = A_+ + A_- \quad (\text{III.79})$$

$$r = A_+\xi_+ + A_-\xi_- \quad (\text{III.80})$$

Физический смысл граничных условий : падающая волна возбуждает две блоховских (III.79), дифрагированные компоненты блоховских волн дают вклады в коэффициент отражения (III.80). Аналогично выглядят граничные условия на правой границе при $z = L$:

$$t = A_+ e^{iK_+L} + A_- e^{iK_-L} \quad (\text{III.81})$$

$$0 = \xi_+ A_+ e^{-iK_-L} + \xi_- A_- e^{-iK_+L}. \quad (\text{III.82})$$

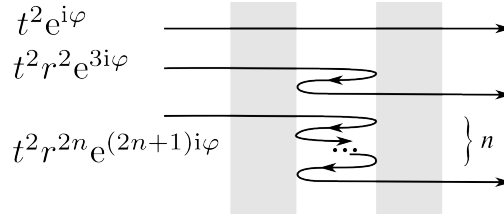


Рис. 47 Вклады в пропускание света через трехслойную структуру

Их физический смысл граничных условий : распространяющиеся направо компоненты блоховских волн дают вклад в коэффициент пропускания (III.81), а согласно (III.82) справа на структуру волна не падает.

Из (III.82) и (III.81) находим

$$A_{\pm} = \mp \frac{e^{\mp iQL} \xi_{\mp}}{e^{iQL} \xi_{+} - e^{-iQL} \xi_{-}}, \quad (\text{III.83})$$

где мы учли что $K_{\pm}L = \pm QL$. Подставляя в (III.80) получаем

$$r = \frac{\xi_{+}\xi_{-}(e^{iQL} - e^{-iQL})}{\xi_{+}e^{iQL} - \xi_{-}e^{-iQL}} \quad (\text{III.84})$$

Используя явное выражение для ξ из (III.74) находим

$$r = \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{Br}} - \omega - i(Qc/\sqrt{\varepsilon^{(0)}}) \cot QL}, \quad (\text{III.85})$$

Для толстой структуры $i \cot QL = 1$, (т.к. физическим, затухающим решениям соответствуют $\text{Im } Q > 0$) и

$$r_{\infty} = \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{Br}} - \omega - i\sqrt{\Delta\omega^2 - (\omega - \omega_{\text{Br}})^2}}. \quad (\text{III.86})$$

Этот же ответ можно было получить и сразу из (III.80), т.к. в бесконечной системе $A_{-} = 0$ и $r_{\infty} \equiv \xi_{+}$. Таким образом коэффициент отражения от бесконечной системы равен по модулю единице в области запрещенной зоны и спадает за ее пределами, в согласии с рис. 45(b).

С. Резонаторы и волноводы

Брэгговский резонатор

Резонатор представляет собой слой диэлектрика с проницаемостью ε толщины D , помещенный между двумя брэгговскими зеркалами, см. рис. 47,48. Пусть зеркала име-

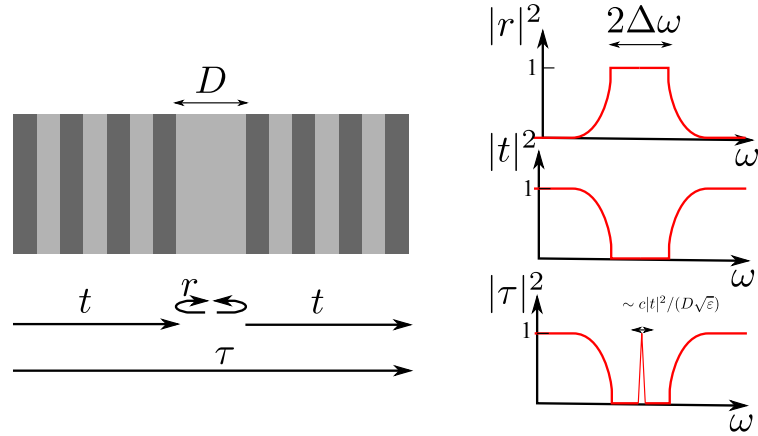


Рис. 48 Схематическое изображение резонатора с брэгговскими зеркалами

ют коэффициенты отражения и пропускания r и t , причем т.к. потерь на поглощение нет, то $|r|^2 + |t|^2 = 1$. Для толстых зеркал коэффициент пропускания в области фотонной запрещенной зоны мал, $|t| \sim e^{-2\text{Im}K_z L}$, где L — толщина зеркала, а K_z — блоховский вектор.

Коэффициент пропускания через резонатор можно получить, сложив вклады от всех возможных путей многократного прохода, см. рис. 47:

$$\tau = te^{i\varphi}t + te^{i\varphi}r^2e^{2i\varphi}t + te^{i\varphi}r^4e^{4i\varphi}t + \dots = \frac{t^2e^{i\varphi}}{1 - r^2e^{2i\varphi}}. \quad (\text{III.87})$$

Здесь $\varphi = \omega\sqrt{\epsilon}D/c = 2\pi D/\lambda$ — набег фазы при проходе волной резонатора.

Пусть толщина резонатора подобрана так, что на брэгговской частоте в него укладывается целое число полуволин:

$$\varphi(\omega_{\text{Br}}) = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad D = \frac{m\lambda(\omega_{\text{Br}})}{2} = \frac{cm\pi}{\omega\sqrt{\epsilon}}. \quad (\text{III.88})$$

Тогда получаем

$$\varphi(\omega) = m\pi + \frac{(\omega - \omega_{\text{Br}})\sqrt{\epsilon}D}{c} \quad (\text{III.89})$$

$$\tau \approx \frac{t^2e^{i\varphi}}{1 - r^2 - 2ir^2\frac{(\omega - \omega_{\text{Br}})\sqrt{\epsilon}D}{c}}. \quad (\text{III.90})$$

Учтем, что на брэгговской частоте r и t вещественны. Это понятно из физических соображений — набег фазы на каждом периоде кратны π , поэтому все фазовые множители $e^{i\varphi}$, входящие в матрицы переноса и коэффициенты отражения и пропускания, оказываются вещественны. Также будем считать, что набег фазы в зеркалах при отхождении

от резонанса несущественен (это обычно не так для реальных структур). Тогда из закона сохранения энергии $1 - r^2 = t^2$, и учитывая, что r^2 близко к 1, окончательно для пропускания находим

$$\tau \approx \frac{t^2 e^{i\varphi}}{t^2 - 2i \frac{(\omega - \omega_{\text{Br}}) \sqrt{\varepsilon} D}{c}}, \quad |\tau|^2 = \frac{t^4}{t^4 + 4(\omega - \omega_{\text{Br}})^2 \varepsilon D^2 / c^2}. \quad (\text{III.91})$$

Таким образом, на частоте ω_{Br} имеем $|\tau| = 1$, несмотря на то, что коэффициенты прозрачности зеркал могут быть сколь угодно малы. То есть, через два плохо пропускающих зеркала, поставленных друг за другом, может пройти 100% света.

Это явление называется *резонансным туннелированием* и связано с конструктивной интерференцией всех путей прохождения через резонатор в (III.87). Ширина пика прохождения порядка $ct^2 / (D\sqrt{\varepsilon})$. Частота собственной моды резонатора определяется как полюс коэффициента пропускания на комплексной собственной частоте,

$$\omega^* = \omega_{\text{Br}} - \frac{ict^2}{2D\sqrt{\varepsilon}} = \omega_{\text{Br}} \left(1 - \frac{it^2}{2m\pi} \right). \quad (\text{III.92})$$

Мнимая часть частоты описывает радиационные потери — уход волны из резонатора за счет туннелирования через зеркала. Действительно, пусть собственная мода как-то возбуждена в резонаторе в начальный момент $T = 0$, тогда интенсивность поля собственной моды будет зависеть от времени T как

$$|e^{-i\omega^* T}|^2 = e^{-\frac{T}{Q T_0}}, \quad (\text{III.93})$$

где введено время обхода волной резонатора $T_0 = 2D\sqrt{\varepsilon}/c$ и *добротность резонатора*

$$Q = \frac{1}{2t^2} \quad (\text{III.94})$$

— число циклов колебания моды в резонаторе, после которого интенсивность поля спадает в e раз. То есть поле будет тем дольше храниться в резонаторе, чем менее прозрачны зеркала.

Поле внутри резонатора, возбуждаемое внешней плоской волной на вещественной брэгговской частоте, равняется

$$E(z) = t \frac{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon}z/c} + r e^{2i\varphi - i\omega\sqrt{\varepsilon}z/c}}{1 - r^2 e^{2i\varphi}} \approx 2 \frac{\cos(\omega\sqrt{\varepsilon}z/c)}{t} \propto \sqrt{Q}. \quad (\text{III.95})$$

Оно соответствует стоячей волне, интенсивность которой усилена в $\sim Q$ раз.

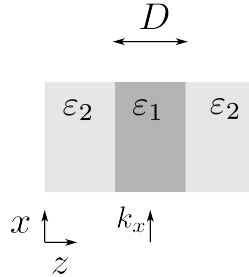


Рис. 49 Схематическое изображение планарного диэлектрического волновода

Планарный волновод

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ равняется ε_1 при $|z| < D/2$ и ε_2 при $|z| > D/2$ ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$), см. рис. 49. Рассмотрим случай ТЕ поляризации,

$$\mathbf{E}(x, z) = E_y(z)e^{ik_x x} \mathbf{e}_y. \quad (\text{III.96})$$

Тогда волновое уравнение

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + \left(-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(z) + k_x^2 \right) \right] E_y = 0. \quad (\text{III.97})$$

Уравнение (III.97) формально полностью аналогично уравнению Шредингера для электрона в потенциальной яме

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [U(z) - E] \right] \psi = 0. \quad (\text{III.98})$$

В роли эффективного потенциала выступает $-(\omega/c)^2 \varepsilon(z)$, а в роли энергии E — величина $-k_x^2$. Наша цель — найти решение, соответствующее волне, которая внутри волновода распространяется, а снаружи — экспоненциально затухает. Это означает, что частота лежит между световыми конусами для областей внутри и снаружи волновода,

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2} < k_x < \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}, \quad (\text{III.99})$$

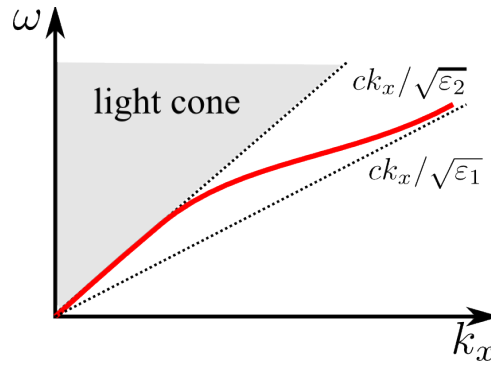


Рис. 50 Схематическое изображение закона дисперсии для основной TE моды в диэлектрическом волноводе

см. рис. 50 (для электронов это соответствует тому, что уровень выше дна ямы, но под барьером). Из аналогии с электронной задачей сразу можно воспользоваться результатом о том, что в симметричном волноводе всегда есть хотя бы одна мода. Частоты собственных мод можно определить из уравнения $r^2 e^{2i\varphi} = 1$, где

$$r_{\text{TE}} = \frac{k_{z,1} - k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}}, \quad k_{z,1,2} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_{1,2} - k_x^2} \quad (\text{III.100})$$

— коэффициент отражения в TE поляризации. Это уравнение для четной моды ($r e^{i\varphi} = 1$) можно переписать в виде

$$\frac{i k_{z,1}}{k_{z,2}} = \cot \frac{k_{z,1} D}{2}. \quad (\text{III.101})$$

Отметим, что поскольку $k_{z,2}$ чисто мнимо, то в левой части уравнения стоит вещественная величина. При малых частотах, $\omega \sqrt{\varepsilon_{1,2}} D / c \ll 1$ закон дисперсии $\omega(k_x)$ близок к линейному. При этом поле сосредоточено в основном вне волновода, а следовательно угол наклона закона дисперсии определяется показателем преломления снаружи волновода, $d\omega/dk_x \approx c/\sqrt{\varepsilon_1}$. На больших частотах наоборот, поле в основном сосредоточено внутри волновода и $d\omega/dk_x \approx c/\sqrt{\varepsilon_1}$, см. рис. 50.

IV. Шары и массивы шаров

A. Рассеяние на одиночном шаре

Сечения рассеяния и поглощения

Литература: Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, М.:1961, глава

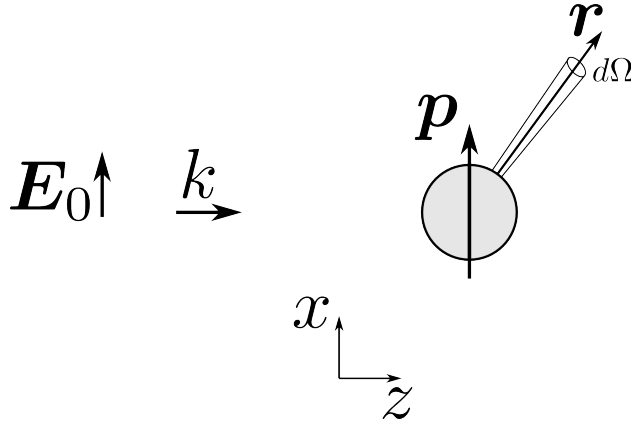


Рис. 51 Рассеяние света на малой частице

6 Рассмотрим рассеяние плоской волны (частота ω , амплитуда: $\mathbf{E}_0 \parallel x$) на частице с проницаемостью ε , помещенной в вакуум. Геометрия рассеяния показана на рис. 51. Рассеяние будем описывать в дипольном приближении, считая частицу малой по сравнению с длиной волны. Электрическое поле представляет собой сумму падающей и рассеянной волн,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x e^{iqz} + \hat{G}(\mathbf{r}) \mathbf{p}, \quad (\text{IV.1})$$

где $q = \omega/c$. Дипольный момент, наведенный на частице падающей волной, равен

$$\mathbf{p} = \alpha E_0 \mathbf{e}_x, \quad \alpha = R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad (\text{IV.2})$$

— поляризуемость частицы [см. (I.62)]. Функция Грина

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \left(q^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \frac{e^{iqr}}{r}, \quad (\text{IV.3})$$

удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = q^2 \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + 4\pi q^2 \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}), \quad (\text{IV.4})$$

ее явный вид приведен в [ЛЛ2, формула 72.7]. На расстояниях от частицы, больших по сравнению с длиной волны, так что $kr \gg 1$, производными от $1/r$ в (IV.3) можно пренебречь. Тогда функция Грина описывает испускание поперечных волн,

$$\hat{G}(\mathbf{r}) \approx q^2 (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) \frac{e^{iqr}}{r}, \quad (\text{IV.5})$$

распространяющихся вдоль направления $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, т.е. $\hat{G}\mathbf{p} \perp \mathbf{n}$. Электрическое поле можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x e^{iqz} + \mathbf{f}(\mathbf{n}) E_0 \frac{e^{iqr}}{r}, \quad (\text{IV.6})$$

где введена *амплитуда рассеяния*

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) = q^2 \alpha [\mathbf{e}_x - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x)] = -q^2 \alpha \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_x). \quad (\text{IV.7})$$

Из формулы (IV.7) видно, что наибольшая интенсивность для рассеянной волны будет при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x = 0$, т.е. при рассеянии в плоскости yz . То есть диполь сильнее всего излучает в плоскости, перпендикулярной своему направлению. Рассеянное поле на больших расстояниях от системы всегда можно представить в виде (IV.6), даже если дипольное приближение не выполняется. Как следует из (II.41), вектор Пойнтинга, описывающий плотность потока энергии рассеянных волн в направлении \mathbf{n} , равен

$$\mathbf{S}_{\text{scat}}(\mathbf{n}) = \frac{c}{2\pi} |E_{\text{scat}}(\mathbf{n})|^2 \mathbf{n} \quad (\text{IV.8})$$

или

$$\mathbf{S}_{\text{scat}}(\mathbf{n}) = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \frac{|f(\mathbf{n})|^2 |E_0|^2}{r^2} = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} q^4 |\alpha^2| \sin^2 \theta. \quad (\text{IV.9})$$

В телесный угол $d\Omega$ излучается волны мощностью $W_{\text{scat}} = r^2 d\Omega \cdot \mathbf{S}_{\text{scat}}$. Плотность потока энергии для падающей волны равняется

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c}{2\pi} |E_0|^2 \mathbf{e}_z. \quad (\text{IV.10})$$

Удобно поделить W_{scat} на \mathbf{S}_0 и получить параметр размерности площади, описывающий силу рассеяния и не зависящий от интенсивности падающей волны. Он называется *дифференциальным сечением рассеяния*,

$$d\sigma_{\text{scat}} \equiv \frac{dW_{\text{scat}}}{S_0} = q^4 |\alpha^2| \sin^2 \theta d\Omega. \quad (\text{IV.11})$$

Здесь θ — угол между осью x и вектором \mathbf{n} . Полное сечение рассеяния получается интегрированием по углу, $\sigma_{\text{scat}} = \int d\sigma_{\text{scat}}$. Среднее по углу от $\langle \sin^2 \theta \rangle$ можно вычислить как $1 - \langle \cos^2 \theta \rangle = 1 - 1/3 = 2/3$. Поэтому сечение рассеяния равняется

$$\sigma_{\text{scat}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\alpha^2|. \quad (\text{IV.12})$$

Физически σ_{scat} — эффективная площадь, попадая на которую свет может рассеяться. Как следует из (I.62), для малых шариков $\alpha \propto R^3$. Поэтому сечение рассеяния пропорционально $R^2(R/\lambda)^4$, т.е. много меньше, чем геометрическое сечение шара. Для резонансного рассеяния (когда ε близко к -2) все может быть иначе и сечение рассеяния может превосходить геометрическое сечение.

В пренебрежении зависимостью α от частоты сечение рассеяния пропорционально ω^4 . Это характерная особенность т.н. *рэлеевского* рассеяния на малых частицах. Именно эта зависимость ω^4 , объясняет синий цвет неба — синий свет от солнца рассеивается сильнее. На закате солнце красное именно потому, что синий свет рассеялся, а красный — прошел к нам. В зените лучи солнца проходят атмосферу под прямым углом, поэтому пройденный путь меньше, вероятность рассеяться слабее, и красный цвет не выражен. Хорошая статья, объясняющая почему небо синее, а облака — белые: [C.F. Bohren, *Weatherwise*, **36**, 143-146 (1983) <http://dx.doi.org/10.1080/00431672.1983.9930132>].

Если диэлектрическая проницаемость частицы ε комплексна, то частица будет поглощать мощность. Средняя поглощенная мощность равняется

$$W_{\text{abs}} = \overline{\mathbf{j}(t) \cdot \mathbf{E}_0(t)}, \quad (\text{IV.13})$$

где ток и электрическое поле равны

$$\mathbf{j}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -i\omega\mathbf{p}e^{-i\omega t} + c.c., \quad \mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0e^{i\omega t} + c.c., \quad (\text{IV.14})$$

а черта обозначает усреднение по времени. Здесь мы воспользовались тем, что плотность тока — это производная по времени от поляризации. Выполняя усреднение, получаем

$$W_{\text{abs}} = 2 \operatorname{Re}(-i\omega\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0^*) = 2\omega \operatorname{Im} \alpha |E_0|^2. \quad (\text{IV.15})$$

Соотношение поглощаемой мощности и плотности потока энергии падающей волны дает *сечение поглощения*

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{W_{\text{abs}}}{S} = 4\pi \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \alpha. \quad (\text{IV.16})$$

Поскольку $\alpha \propto R^3$, то при $\operatorname{Im} \varepsilon \sim 1$ и $R \ll \lambda$ имеем $\sigma_{\text{abs}} \sim R^3 \gg \sigma_{\text{scat}} = R^6/\lambda^4$, т.е. маленькие частицы лучше поглощают, чем рассеивают. С ростом размера частицы рассеяние становится существенней.

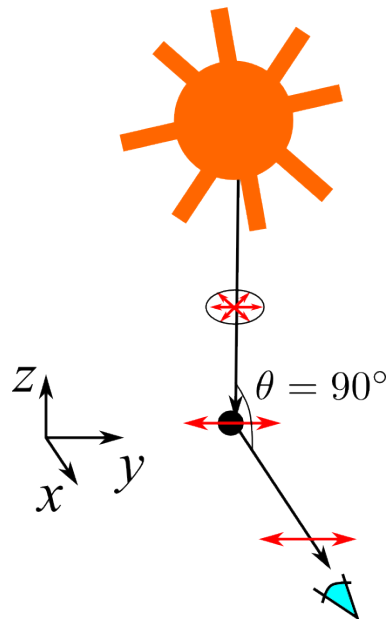


Рис. 52 Иллюстрация поляризации неба

Поляризация неба

Как следует из (IV.6), поляризация рассеянного света зависит от поляризации падающего и направления излучения. Интенсивность рассеянного света максимальна при рассеянии на 90° , т.е. когда рассеянная волна распространяется под прямым углом к падающей. Комбинация этих эффектов приводит к тому, что небо поляризовано, хотя прямое излучение от солнца — нет. Механизм образования поляризации для рассеянного света показан на рис. 52. Наибольшая амплитуда рассеяния будет для $\theta = 90^\circ$, т.е. под прямым углом к солнцу (например, на горизонте под солнцем). Пусть рассеянный свет распространяется вдоль оси x , а падающий — вдоль оси z . Тогда электрическое поле падающей волны случайно поляризовано в плоскости xy . Поэтому оно будет возбуждать случайно поляризованный в плоскости xy диполь. Если смотреть на этот диполь сбоку, с направления x , то будет казаться, что он поляризован линейно вдоль оси y . Поэтому рассеянный в направлении x свет будет иметь линейную поляризацию в плоскости zy . Есть гипотеза, что эффект поляризации неба использовался викингами для навигации.

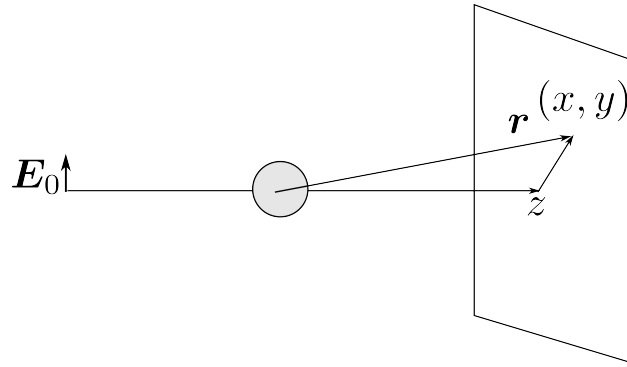


Рис. 53 Рассеяние света вперед и сечение экстинкции

Сечение экстинкции. Оптическая теорема

Литература: Г.ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, М.:1961, §4.2

Рассмотрим, как свет будет распространяться через рассеивающую среду. Можно ожидать, что волна будет ослабляться за счет как рассеяния, так и поглощения. Попробуем рассчитать этот эффект. Для этого определим, какая мощность будет зарегистрирована на экране, поставленном впереди рассеивающей частицы. Рассмотрим поле, рассеиваемое вперед в область с $x, y \ll z \gg 1/q$. В этом случае поляризация рассеянного поля такая же, как и у падающего

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx E_0 \mathbf{e}_x \left(e^{iqz} + \frac{q^2}{r} \alpha e^{iqr} \right). \quad (\text{IV.17})$$

Радиус-вектор можно представить в виде

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}, \quad (\text{IV.18})$$

поэтому

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx E_0 \mathbf{e}_x e^{iqz} \left(1 + \frac{2q^2}{z} \alpha e^{iq \frac{x^2 + y^2}{2z}} \right). \quad (\text{IV.19})$$

Вычислим интегральное поле на экране

$$\iint dx dy |E|^2 \approx \iint dx dy |E_0|^2 + 2q^2 |E_0|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha}{z} \iint e^{iq \frac{x^2 + y^2}{2z}} dx dy \right). \quad (\text{IV.20})$$

Здесь мы пренебрегли слагаемым $1/z^2$, т.к. $z \gg 1/q$. Вычисляя интеграл Гаусса, получаем

$$\iint dx dy |E|^2 \approx \iint dx dy |E_0|^2 + 2q^2 \operatorname{Re} \frac{2\pi i \alpha}{q} |E_0|^2 \equiv \iint dx dy |E_0|^2 - |E_0|^2 \sigma_{\text{ext}}. \quad (\text{IV.21})$$

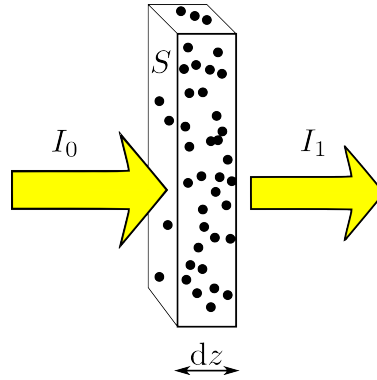


Рис. 54 Ослабление света в рассеивающей или поглощающей среде

Физический смысл этого выражения в том, что из падающей волны частица “выедает” область площадью σ_{ext} . Поэтому ослабление волны характеризуется т.н. *сечением экстинкции*

$$\sigma_{\text{ext}} = 4\pi \frac{\omega}{c} \text{Im } \alpha . \quad (\text{IV.22})$$

Это выражение применимо не только в дипольном приближении. Если рассеяние характеризуется произвольной амплитудой рассеяния (IV.6), а падающее поле поляризовано вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_0 \perp z$, то сечение экстинкции равняется

$$\sigma_{\text{ext}} = 4\pi \frac{c}{\omega} \text{Im } \mathbf{f}(\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_0^* . \quad (\text{IV.23})$$

Теперь изучим, что будет если свет рассеивается не на одной частице, а на их массиве, см. рис. 54. Пусть интенсивность волны, падающий на слой толщиной dz , равняется $I = |E|^2$. Будем считать, что поле рассеивается на всех частицах независимо и однократно, т.е. пренебрегаем интерференцией рассеянных волн и считаем рассеяние однократным. Тогда интенсивность прошедшей волны — это интенсивность падающей за вычетом вкладов ослабления на каждой частице, т.е.

$$SI_1 = SI_0 - \sigma_{\text{ext}}NI_0 . \quad (\text{IV.24})$$

Здесь S — площадь сечения слоя, а $N = nSdz$ — число частиц в нем, n — концентрация. Отсюда получаем, что поле в среде будет ослабляться по экспоненте

$$\frac{I_1 - I_0}{dz} \equiv \frac{dI}{dz} = -n\sigma_{\text{ext}}I \quad (\text{IV.25})$$

$$I(z) = I(z=0)e^{-n\sigma_{\text{ext}}z} , \quad (\text{IV.26})$$

т.н. закон Бугера.

Формула (IV.22) выглядит парадоксально. Согласно ней, для непоглощающей частицы можно подумать, что $\text{Im } \alpha = 0$ и $\sigma_{\text{ext}} = 0$, т.е. поле не будет ослабляться. Из физических же соображений поле ослабляется даже при отсутствии поглощения, из-за рассеяния, $\sigma_{\text{scat}} \neq 0$, поэтому можно ожидать и $\sigma_{\text{ext}} \neq 0$. Где ошибка? Не потерян ли в σ_{ext} вклад рассеяния?

Ошибка в том, что формулу (IV.22) нужно подправить и рассчитать с точностью до α^2/λ^6 . Физически это связано с необходимостью учета самодействия, или, другими словами, силы реакции излучения. Частица излучает волну, которая в свою очередь поляризует частицу, и т.д. Из-за этого эффекта оказывается, что $\text{Im } \alpha \neq 0$ даже если $\text{Im } \varepsilon = 0$. Иными словами, помимо омических потерь, бывают потери на излучение, что и приводит к $\text{Im } \alpha \neq 0$. Чтобы их описать, достаточно найти мнимую часть функции Грина при малых r :

$$G_{xx}(r) = \left(q^2 + \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{e^{iqr}}{r} = \left(q^2 + \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{1 + iqr - \frac{(qr)^2}{2} - i\frac{(qr)^3}{6}}{r}, \quad (\text{IV.27})$$

$$\text{Im } G_{xx}(0) = q^3 - \frac{q^3}{6} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2q^3}{3}. \quad (\text{IV.28})$$

Поэтому вблизи начала координат функцию Грина можно представить в виде

$$\hat{G}(\mathbf{r}) \approx G_1(\mathbf{r}) + G_2(\mathbf{r}) + G_3(\mathbf{r}) \equiv -\frac{4\pi}{3}\delta(\mathbf{r}) + \frac{2iq^3}{3} + \frac{3\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - r^2\hat{\mathbf{1}}}{r^5}, \quad qr \ll 1. \quad (\text{IV.29})$$

С сингулярным слагаемым G_1 , а также с G_3 мы уже имели дело, когда получали в (I.89) поляризуемость малой сферы методом функций Грина. Сейчас они нас не интересуют, т.к. они уже учтены в поляризуемости α и вещественны. Наша задача — учесть силу реакции излучения, которая описывается вкладом G_2 . Ранее мы считали, что дипольный момент наводится полем падающей волны, т.е.

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0. \quad (\text{IV.30})$$

На самом деле еще нужно учесть поле, излученное сами диполем, т.е.

$$\mathbf{p} = \alpha(\mathbf{E}_0 + G_2\mathbf{p}). \quad (\text{IV.31})$$

Решение этой задачи дает

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha}{1 - G_2\alpha} \mathbf{E}_0 = \tilde{\alpha} \mathbf{E}_0, \quad (\text{IV.32})$$

где введена поляризуемость

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \frac{2i}{3} \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \alpha}, \quad (\text{IV.33})$$

которая, в отличие от α , учитывает поправки на излучение.

Рассчитаем теперь сечение экстинкции с учетом силы реакции излучения. Предыдущий вывод не поменяется, но вместо α нужно подставить $\tilde{\alpha}$, т.е.

$$\sigma_{\text{ext}} = 4\pi \frac{\omega}{c} \text{Im } \tilde{\alpha}. \quad (\text{IV.34})$$

Сечение рассеяния равняется

$$\sigma_{\text{scat}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\tilde{\alpha}^2|. \quad (\text{IV.35})$$

Легко видеть, что теперь для непоглощающей частицы, когда $\text{Im } \alpha = 0$, будет $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{scat}}$, т.е. противоречие снято.

Докажем теперь оптическую теорему в общем виде. Для этого нужно аккуратно записать формулу для сечения поглощения. Можно показать, что вместо (IV.16) сечение поглощения нужно записывать, как

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi \frac{\omega}{c} \text{Im} \frac{|p|^2}{\alpha^* |E_0|^2} \quad (\text{IV.36})$$

Это формула обобщает формулу для омических потерь в цепи с током I и сопротивлением R . $W = I^2 R$, т.е. ток I пропорционален дипольному моменту \mathbf{p} , а мнимая часть обратной поляризуемости $\text{Im } 1/\alpha^*$ пропорциональна омическому сопротивлению R . Ключевой момент — то, что $\text{Im } 1/\alpha^*$ учитывает только омические потери, в то время как $\text{Im } 1/\tilde{\alpha}^*$ учитывает и омические, и радиационные. Мы включаем в сечение поглощения лишь омические потери, т.к. радиационные уже учтены в сечении рассеяния (IV.47). Подставляя явное выражение для $\tilde{\alpha}$ получаем

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi \frac{\omega}{c} \text{Im} \frac{|\tilde{\alpha}|^2}{\alpha^*}, \quad \frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{\tilde{\alpha}^*} - \frac{2iq^3}{3}. \quad (\text{IV.37})$$

или

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi \frac{\omega}{c} \text{Im } \tilde{\alpha} - \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\tilde{\alpha}^2|. \quad (\text{IV.38})$$

Сравнивая с (IV.34), (IV.47), получаем *оптическую теорему*

$$\sigma_{\text{abs}} + \sigma_{\text{scat}} = \sigma_{\text{ext}} = 4\pi \frac{c}{\omega} \text{Im} \mathbf{f}(\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_0^*. \quad (\text{IV.39})$$

Литература: [B. T. Draine, Astrophysical Journal **333**, 848-872 (1988), <http://adsabs.harvard.edu/abs/1988ApJ...333..848D>]

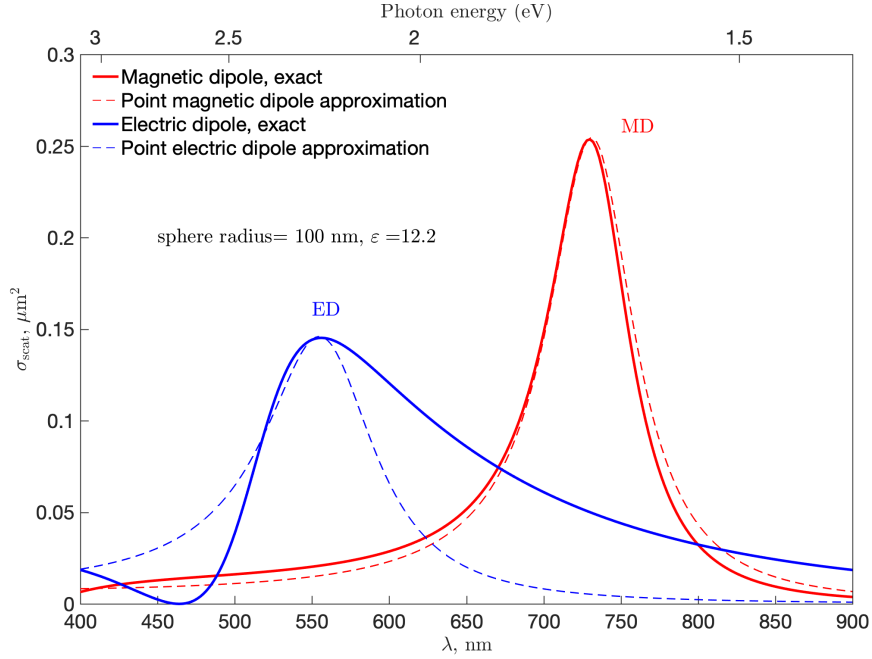


Рис. 55 Вклады в сечение рассеяния сферы радиусом $R = 100$ нм с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 12.2$ от электро- и магнито-дипольных резонансов. Сплошные линии — теория Ми, см. например книгу Craig F. Bohren Donald R. Huffman, “Absorption and Scattering of Light by Small Particles”, Wiley(1998), глава 4. Пунктирные кривые — результаты подгонки формулой (IV.44), при этом бралось $\Gamma = 0$ и $\Gamma_0/\omega_0 R^3 = 0.11$ и 0.25 для MD и ED резонансов, соответственно.

Резонансное рассеяние малой частицей

Пусть частица по-прежнему малая, $R \ll \lambda$, так что работает дипольное приближение, но при этом $\varepsilon \approx -2$, так что в поляризуемости α есть резонанс. На самом деле этим приближением для резонансных частиц можно пользоваться и для не очень малых R/λ . Например, в кремниевой сфере 200 нм есть электро- и магнито-дипольные резонансы в видимой области спектра, которые неплохо описываются в дипольном приближении, см. рис. 55. Ключевой момент — то, что хоть α на резонансе и расходитсся, перенормированная поляризуемость $\tilde{\alpha}$ остается конечной. Даже в непоглощающей частице резонанс будет ограничен потерями на излучение. В частности, из (IV.33) следует, что

$$\alpha \rightarrow \infty \text{ но } \tilde{\alpha} = i \frac{3 c^3}{2 \omega^3}, \quad \sigma_{\text{ext}} = \frac{6 \pi c^2}{\omega^2} = \frac{3}{2 \pi^2} \lambda^2 \quad (\text{IV.40})$$

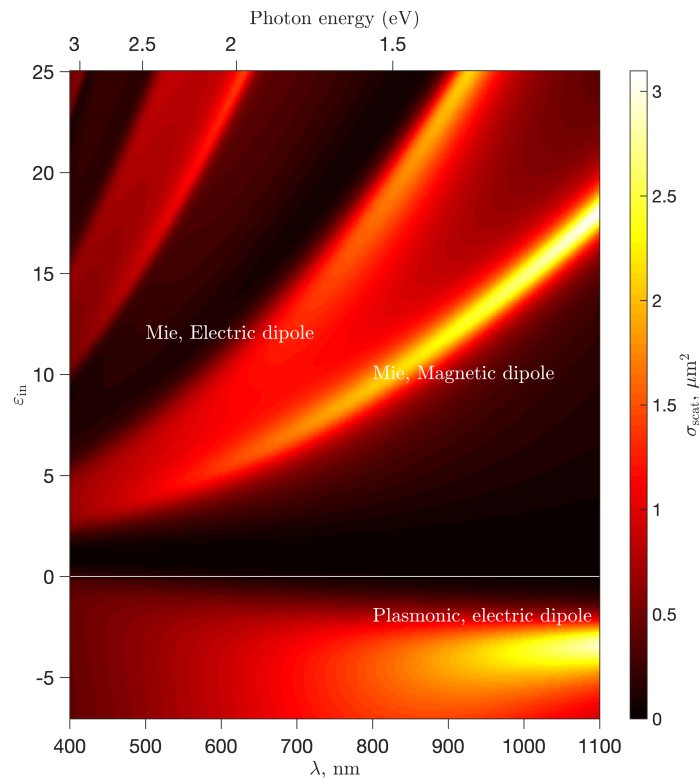


Рис. 56 Зависимость сечения рассеяния сферы радиусом 125 нм от длины волны и диэлектрической проницаемости материала внутри ϵ_{in} .

В общем случае, когда в α есть резонанс на частоте ω_0 , ее можно представить в виде

$$\alpha = \frac{f}{\omega_0 - \omega - i\Gamma}, \quad (\text{IV.41})$$

где Γ — скорость нерадиационного затухания резонанса, а параметр f характеризует силу резонанса. Тогда

$$\tilde{\alpha} = \frac{f}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma + \Gamma_0)}, \quad \Gamma_0 = \frac{2fq_0^3}{3}, \quad (\text{IV.42})$$

и в знаменателе возник параметр Γ_0 — радиационное затухание. Вблизи резонанса сечения экстинкции, рассеяния и поглощения можно представить в виде

$$\sigma_{\text{ext}} \approx \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma_0(\Gamma + \Gamma_0)}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma + \Gamma_0)^2}, \quad (\text{IV.43})$$

$$\sigma_{\text{scat}} \approx \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma + \Gamma_0)^2}, \quad (\text{IV.44})$$

$$\sigma_{\text{abs}} \approx \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma\Gamma_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma + \Gamma_0)^2}, \quad (\text{IV.45})$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$. Из рисунка 55 видно, что для сферы с проницаемостью порядка 10 и радиусом порядка 100 нм низшая мода — магнито-дипольная, при этом резонанс получается достаточно узким. Еще более добротных резонансов можно добиться для дисков — в этом случае произойдет гибридизация различных мод друг с другом, и разные вклады в Γ_0 могут интерферировать деструктивно, см. статью [Rybin et al, “High-Q Supercavity Modes in Subwavelength Dielectric Resonators”](#).

Рэлеевское приближение отсюда получится, если положить $\omega = \omega_0$ но пренебречь радиационным затуханием, т.е $\Gamma \gg \Gamma_0$. Тогда

$$\sigma_{\text{ext}}(\omega_0) \approx \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \approx \sigma_{\text{abs}}(\omega_0), \quad (\text{IV.46})$$

$$\sigma_{\text{scat}}(\omega_0) \approx \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma^2} \ll \sigma_{\text{ext}}(\omega_0). \quad (\text{IV.47})$$

Видно, что сечение рассеяния (IV.47) $\sim (\Gamma_0\lambda_0)^2 \sim 1/\lambda_0^4$, как и должно быть в нерезонансном рэлеевском приближении.

Теория Ми подробно обсуждается вот [здесь](#).

В. Приближение Максвелла-Гарнетта

Литература:

детали: [G. W. Milton, “The Theory of Composites”, Cambridge University of Composites (2004), SS10.5].

1. Наводящие соображения

Рассмотрим среду, состоящую из случайно расположенных шаров с диэлектрической проницаемостью ε_1 , расположенных внутри среды с проницаемостью ε_2 . Пусть $f_1 = 1 - f_2$ — доля объема среды, занимаемой шарами. Попробуем ввести эффективную диэлектрическую проницаемость такой среды, наподобие тому как в предыдущей главе мы это делали для слоистой среды. Согласно (I.62), поле внутри и снаружи сферы связаны как

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \mathbf{E}_0. \quad (\text{IV.48})$$

Будем считать теперь, что \mathbf{E}_0 , поле снаружи сфер, это и есть среднее поле в области

2. Тогда эффективную диэлектрическую проницаемость можно по определению найти

как

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{\bar{D}}{\bar{E}} = \frac{E_0(1-f_1)\varepsilon_1 + f_1\varepsilon_1 E_{\text{in}}}{E_0(1-f_1) + f_1 E_{\text{in}}} = \frac{(1-f_1)\varepsilon_1 + \frac{3f_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}}{(1-f_1) + \frac{3f_1\varepsilon_1}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}}. \quad (\text{IV.49})$$

Конечный ответ принимает вид

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_2 \frac{1 + 2f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}}{1 - f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}} \equiv \varepsilon_2 \frac{1 + \frac{8\pi}{3}\alpha n}{1 - \frac{4\pi}{3}\alpha n}, \quad \alpha = \frac{3V}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}, \quad n = \frac{f_1}{V}, \quad (\text{IV.50})$$

где он также записан через поляризуемость шаров α и их концентрацию n (V — объем шара). В пределе малых факторов заполнения $f_1 \rightarrow 0$ эффективная диэлектрическая проницаемость равняется

$$\frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_1} = 1 + 3f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \equiv 1 + 4\pi n \alpha, \quad (\text{IV.51})$$

а для $f_1 \rightarrow 1$ она равняется $\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_1$. Выражение (IV.50) было независимо получено четырьмя разными людьми, перечисленными ниже согласно [А. MacLeod, “An Introduction to composite materials”], а носит имя пятого, с двойной фамилией:

- Ottaviano Mosotti (1850), Италия (уравнения Максвелла появятся лишь в 1873),
- Ludvig Valentin Lorenz (1869), Дания
- Hendrik Antoon Lorentz (1878), Голландия (Нобелевская премия за эффект Зеемана, 1908; тот же что и сила Лоренца)
- Rudolf Clausius (1879), Австро-Венгрия,
- James Clerk Maxwell-Garnett (1904), Англия.

Поэтому (IV.50) можно называть формулой Лоренц-Лорентца, Клаузиуса-Моссотти, Максвелл-Гарнетта. Максвелл-Гарнетт — это один человек, а не два. Вильям Гарнетт, ассистент Максвелла, дал сыну двойную фамилию Максвелл-Гарнетт в честь классика электродинамики (а также имена Джеймс Клерк, как и у Максвелла). Также встречается в литературе название этой же формулы формулой Вагнера, см. обзор [J. L. Greffe and C. Grosse, “Static Permittivity of Emulsions”, Progress In Electromagnetics Research, 6 41(1991)] и ссылку 26 в нем на работу [K.W. Wagner, “Erklärung der dielektrischen Nachwirkungsvorgänge auf Grund Maxwellscher Vorstellungen”, Arch. Electrotech. 2, 371 (1914)].

Интересно, что преобразования Лоренца открыл Hendrik Lorentz, а вот калибровку Лоренца — придумал Ludvig Valentin Lorenz, см. детали [здесь](#).

2. Строгий вывод

При выводе (IV.50) мы существенным образом опирались на предположение о том, что локальное поле \mathbf{E}_0 , действующее на данный шар, совпадает со средним полем в среде 2. Это предположение годится не для всякой случайной среды, а лишь для среды, где шары расположены относительно равномерно, и не собираются в кластеры. При этом формула (IV.50) является точной для периодической кубической решетки шаров в длинноволновом пределе. Выведем ее строго методом функций Грина. Нам потребуется разложение в ряд Фурье функции Грина

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \left(q^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \frac{e^{iqr}}{r} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G_{\mathbf{k},\alpha\beta} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad G_{\mathbf{k},\alpha\beta} = -4\pi \frac{q^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta}{q^2 - k^2} \quad (\text{IV.52})$$

и его электростатический предел ($qr \ll 1$)

$$G_{\alpha\beta}^{(\text{stat})}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}, \quad G_{\mathbf{k},\alpha\beta}^{(\text{stat})} = -4\pi \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (\text{IV.53})$$

Попробуем рассчитать дисперсию собственных мод в решетке шаров в *модели дискретных диполей*. Шары будем считать субволновыми, так что каждый из них может быть описан как точечный электрический диполь $\mathbf{p}(\mathbf{a})$, расположенный в точке \mathbf{a} решетки. Поле данного диполя определяется суммой полей всех остальных, действующих на него

$$\mathbf{p}(0) = \tilde{\alpha} \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G(-\mathbf{a}) \mathbf{p}(\mathbf{a}), \quad (\text{IV.54})$$

где суммирование идет по всей решётке. Здесь мы для простоты считаем, что шары расположены в вакууме ($\varepsilon_2 = 1$). Будем искать блоховское решение в виде

$$\mathbf{p}(\mathbf{a}) = \mathbf{p}(0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \quad (\text{IV.55})$$

с волновым вектором \mathbf{k} . Тогда уравнение на дисперсию собственных мод определяется из условия равенства нулю определителя системы уравнений (IV.54)

$$\det \left[1 - \tilde{\alpha} \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G(\mathbf{a}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \right] = 0. \quad (\text{IV.56})$$

Осталось рассчитать сумму по решетке. Проблема в том, что она *очень* плохо сходится. Без специальных ухищрений на компьютере ее в лоб не рассчитать. Но в длинноволновом приближении это можно сделать аналитически. Основная идея в том, что сумма

в (IV.56)— это почти преобразование Фурье от функции Грина. Вся проблема в том, что в ряде нет слагаемого с $\mathbf{a} = 0$, а добавить его просто так нельзя, поскольку $G(0)$ сингулярна. Попробуем бороться с сингулярностью следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G(\mathbf{a}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sum_{\mathbf{a}} G(\mathbf{r} - \mathbf{a}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} - G(\mathbf{r}) \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sum_{\mathbf{a}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}-\mathbf{a})} G_{\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} - G(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

Учтем, что

$$\sum_{\mathbf{a}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{b}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{b}) \frac{(2\pi)^3}{V_0}, \quad (\text{IV.58})$$

где \mathbf{b} — векторы обратной решетки. Для кубической решетки с периодом a они равняются

$$\mathbf{b}_{h_1 h_2 h_3} = \frac{2\pi}{a} (h_1 \mathbf{e}_x + h_2 \mathbf{e}_y + h_3 \mathbf{e}_z), \quad (\text{IV.59})$$

где $h_{1,2,3}$ — целые числа. Формулу (IV.58) можно рассматривать как дискретный аналог формулы $\int d^3 a e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k})$. С учетом (IV.58) в (IV.57) выживут лишь $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{b}$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G(\mathbf{a}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\mathbf{b}} G_{\mathbf{k}+\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{b})\mathbf{r}} - G(\mathbf{r}) \right] = \\ &= \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\mathbf{b} \neq 0} G_{\mathbf{k}+\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{b})\mathbf{r}} - G(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

Теперь во втором слагаемом пренебрежем \mathbf{k} по сравнению с \mathbf{b} , поскольку мы ищем решения с $ka \sim qa \ll 1$. Кроме того, при $r \rightarrow 0$ можно положить $G(\mathbf{r}) \approx G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) + 2iq^3/3$, аналогично (IV.29). Итак, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G(\mathbf{a}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} &= \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V_0} \sum_{\mathbf{b} \neq 0} G_{\text{stat},\mathbf{b}} e^{i\mathbf{b}\mathbf{r}} - G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sum_{\mathbf{b} \neq 0} \frac{1}{V_0} \int d^3 \mathbf{r}' G_{\text{stat}}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V_0} \int d^3 \mathbf{r}' G_{\text{stat}}(\mathbf{r}') \left[\sum_{\mathbf{b}} e^{i\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - 1 \right] - G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

Перейдем обратно в реальное пространство, еще раз воспользовавшись (IV.58).

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G(\mathbf{a}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} &= \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V_0} \int d^3\mathbf{r}' G_{\text{stat}}(\mathbf{r}') \left[V_0 \sum_{\mathbf{a}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{a}) - 1 \right] - G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} - \frac{1}{V_0} \int d^3r G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G_{\text{stat}}(\mathbf{a}) = G_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \frac{4\pi}{3V_0} + \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G_{\text{stat}}(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

Здесь $V_0 = a^3$ — объем элементарной ячейки, и мы воспользовались разобранным на контрольной 2 свойством $\int d^3r G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) = -4\pi/3$. Итак, формула (IV.56) принимает вид

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \frac{4\pi}{3V_0} + \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G_{\text{stat}}(\mathbf{a}) \quad (\text{IV.63})$$

или, учитывая (IV.33),

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{V_0} G_{\mathbf{k}} + \frac{4\pi}{3V_0} + \sum_{\mathbf{a} \neq 0} G_{\text{stat}}(\mathbf{a}). \quad (\text{IV.64})$$

Теперь уравнение стало вещественным, излучательные поправки в $\tilde{\alpha}$ в него не вошли. Это значит, что в бесконечной периодической непоглощающей системе волны распространяются без радиационного затухания. Наш длинный вывод формулы (IV.64) можно изобразить схематически вот так:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r}\text{-пространство} \rightarrow \mathbf{k}\text{-пространство} \rightarrow & \begin{array}{l} \text{ближнее поле } (\mathbf{b} \gg \mathbf{k}) \\ \text{дальнее поле } (\mathbf{b} = 0 \ll \mathbf{k}) \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{r}\text{-пространство, } G_{\text{stat}}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{k}\text{-пространство, } G_{\mathbf{k}} \end{array} \end{array}$$

Вопроизведем полученный ранее для кубической решетки результат (IV.50). Для кубической решетки сумма $\sum_{\mathbf{a} \neq 0} G_{\text{stat}}(\mathbf{a})$ равна нулю по симметрии, т.к. среднее по углу от $3a_{\alpha}a_{\beta} - a^2\delta_{\alpha\beta} = 0$. Пусть $\mathbf{k} \parallel x$, а волна поляризована вдоль y . Тогда для кубической решетки yy -компонента (IV.64) дает

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{V_0} \frac{4\pi q^2}{q^2 - k_x^2} + \frac{4\pi}{3V_0} \quad (\text{IV.65})$$

откуда находим эффективную проницаемость

$$\frac{k_x^2}{q^2} \equiv \varepsilon_{\text{eff}} = \frac{1 + \frac{8\pi\alpha}{3V_0}}{1 - \frac{4\pi\alpha}{3V_0}}, \quad (\text{IV.66})$$

которая совпадает с (IV.50) с точностью до замены $n \rightarrow 1/V_0, \varepsilon_1 \rightarrow 1$.

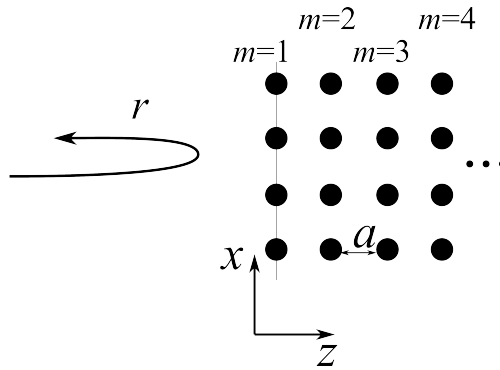


Рис. 57 Отражение света от периодической полубесконечной решетки

3. Отражение света в модели дискретных диполей. Теорема погашения

Рассмотрим отражение света от периодической полубесконечной структуры. Пусть узлы решетки расположены в точках $\mathbf{a} = a(ne_x + le_y + me_z)$, где $n, l = 0, \pm 1, \dots$ и $m = 1, 2, 3, \dots$. Теперь в уравнения модели дискретных диполей (IV.54) нужно добавить внешнее поле падающей волны $\mathbf{E}_0 e^{iqam}$, так что

$$\mathbf{p}_{nlm} = \sum_{\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}, m > 0} G(\mathbf{a}' - \mathbf{a}) \mathbf{p}_{n'l'm'} + \mathbf{E}_0 e^{iqam}. \quad (\text{IV.67})$$

Наша задача — решить эту систему уравнений и найти коэффициент отражения. Пусть $\mathbf{E}_0 \parallel x$ и будем искать ответ внутри структуры в виде блоховской волны, распространяющейся вдоль оси z ,

$$\mathbf{p}_{nlm} \equiv \mathbf{p}_m = p_0 \mathbf{e}_x e^{ik_z am}, \quad (\text{IV.68})$$

где волновой вектор k_z найден из уравнения дисперсии

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{V_0} \frac{4\pi q^2}{q^2 - k_z^2} + \frac{4\pi}{3V_0}, \quad (\text{IV.69})$$

полученного нами ранее. Перепишем (IV.67) в виде

$$p_0 e^{ik_z am} = \tilde{\alpha} \sum_{m' > 0} g_{m'-m} p_0 e^{ik_z m'} + \tilde{\alpha} E_0 e^{iqam}. \quad (\text{IV.70})$$

где по определению

$$g_m = \sum_{n'l', \sqrt{n'^2 + l'^2 + m^2} \neq 0} G_{xx}[n'a\mathbf{e}_x + l'a\mathbf{e}_y + ma\mathbf{e}_z] \quad (\text{IV.71})$$

это сумма по полям от всех диполей внутри слоя m , дошедших до нулевого слоя. Можно показать, что g_m при $m \neq 0$ можно представить в виде суммы в обратном пространстве,

$$g_m = \sum_{\mathbf{h}} e^{ia|m|\sqrt{q^2-h^2}} g^{(\mathbf{h})}, \quad (\text{IV.72})$$

где

$$g^{(\mathbf{h})} \propto \frac{1}{\sqrt{q^2-h^2}} \quad (\text{IV.73})$$

и $\mathbf{h} = (2\pi/a)(\mathbf{e}_x h_1 + \mathbf{e}_y h_2)$ — векторы двумерной обратной решетки ($h_{1,2}$ — целые).

Разложение (IV.72) — это дискретный вариант интегрального тождества

$$g(z) = \int dx dy \frac{e^{iqr}}{r} e^{-i(k_x x + k_y y)} = \frac{2\pi i}{\sqrt{q^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{i|\sqrt{q^2 - k_x^2 - k_y^2}|z} \quad (\text{IV.74})$$

где функция Грина $g(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + q^2 - k_x^2 - k_y^2 \right) g(z) = -4\pi q^2 \delta(z). \quad (\text{IV.75})$$

Мы работаем в длинноволновом приближении, $qa \ll 1$, поэтому $q \ll h$ при $h \neq 0$. Это означает, что в (IV.72) можно перебрать всеми слагаемыми с $h \neq 0$, т.к., как следует из (IV.73), $g^{(0)} \gg g^{(h)}$ при $h \neq 0$ из-за малого знаменателя (а также из-за экспоненциально малого множителя). Поэтому вместо (IV.72) получим

$$g_m = e^{ia|m|q} g^{(0)}, \quad (\text{IV.76})$$

Решим теперь систему (IV.70).

Для бесконечной системы должно выполняться дисперсионное уравнение (IV.54) в виде

$$p_0 e^{ik_z am} = \tilde{\alpha} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} g_{m'-m} p_0 e^{ik_z m'}. \quad (\text{IV.77})$$

У нас же система полубесконечная. Поэтому удобно выделить из (IV.70) часть слагаемых, соответствующих (IV.77), т.е. записать (IV.70) в виде

$$p_0 e^{ik_z am} = \tilde{\alpha} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} g_{m'-m} p_0 e^{ik_z am'} - \tilde{\alpha} \sum_{m'=-\infty}^0 g_{m'-m} p_0 e^{ik_z am'} + \tilde{\alpha} E_0 e^{iqam}. \quad (\text{IV.78})$$

$$p_0 \sum_{m'=-\infty}^0 g_{m'-m} e^{ik_z am'} = E_0 e^{iqam}. \quad (\text{IV.79})$$

Подставляя явный вид $g_{m'-m}$ из (IV.76) получаем

$$p_0 \sum_{m'=-\infty}^0 g^{(0)} e^{ik_z a m' + i q a (m-m')} = E_0 e^{i q a m}. \quad (\text{IV.80})$$

Видно, что на множитель $e^{i q a m}$ можно сократить, т.е. система (IV.80) выполняется одновременно для всех m . Суммируя геометрическую прогрессию в (IV.80), найдем

$$p_0 = \frac{E_0}{g^{(0)}} (1 - e^{i(q-k_z)a}). \quad (\text{IV.81})$$

Тем самым мы доказали *теорему погашения Эвальда-Озеена* — поле в полубесконечной (или конечной) структуре устроено так же, как и в бесконечной, и имеет волновой вектор k , т.е. $\propto e^{ik_z m}$. Вклады, соответствующие падающим волнам $\propto e^{i q a m}$ гасятся. Можно сказать, что падающая волна поляризует диполи, те переизлучают поле, в свою очередь поляризуют решетку, и в результате многократных переотражений падающая волна гасится, а внутри структуры устанавливается блоховская.

Осталось рассчитать коэффициент отражения. Вычислим поле в точке $z_m = m a$ с $m < 0$.

$$E(z < 0) = E_0 e^{i q a m} + \sum_{m' > 0} g_{m-m'} p_{m'} = E_0 e^{i q a m} + \sum_{m' > 0} g^{(0)} e^{i q a (m'-m)} p_0 e^{i k_z a m'} = \\ E_0 e^{i q a m} + e^{-i q a (m-1)} \frac{p_0 g^{(0)}}{1 - e^{i(q+k_z)a}} \quad (\text{IV.82})$$

Второе слагаемое — это и есть отраженная волна. Подставляя явное выражение для p_0 из (IV.81), получаем при $q, k_z \ll 1/a$

$$r = \frac{1 - e^{i(q-k_z)a}}{1 - e^{i(q+k_z)a}} \approx \frac{q - k_z}{q + k_z}. \quad (\text{IV.83})$$

Тем самым мы перевывели формулу Френеля для коэффициента отражения в рамках модели дискретных диполей.

С. Приближение Бруггемана

Литература: [G. W. Milton, “The Theory of Composites”, Cambridge University of Composites (2004), §10.5]; [A. H. Sihvola and I.V. Lindell, “Polarizability Modeling of Heterogenous Media” Progress In Electromagnetics Research, 6, 101 (1991)]

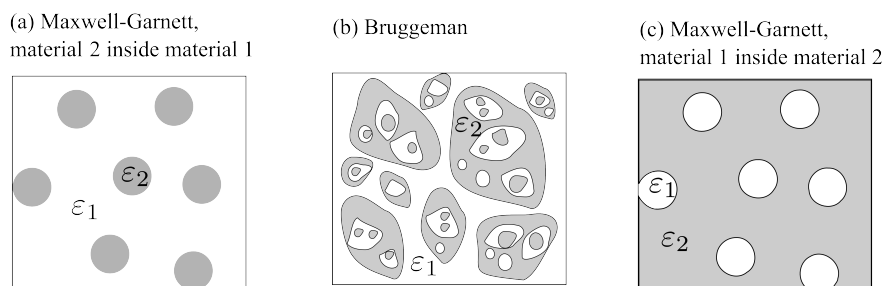


Рис. 58 Схема структур материалов, соответствующих различным моделям диэлектрической проницаемости

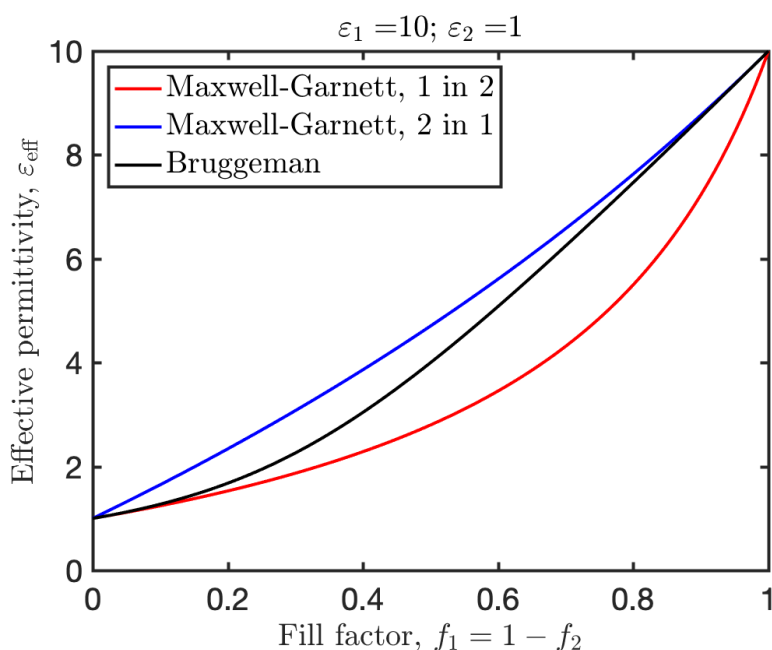


Рис. 59 Расчет для трех различных моделей эффективной среды в зависимости от фактора заполнения материала 1.

Модель эффективной среды Максвелла-Гарнетта подразумевает, что материал 1 окружен материалом 2, см. рис. 58(c). Возможен и противоположный вариант, рис. 58(a) — материал 2 окружен материалом 1. В этом случае также можно использовать модель Максвелла-Гарнетта, но нужно заменить ϵ_1 на ϵ_2 в формуле (IV.50). Однако, есть и промежуточный вариант сильно смешанных сред, показанный на рис. 58(b). В этом случае можно пытаться использовать приближение Бруггемана. Будем считать, что каждая частица, и из материала 1 и из материала 2, окружена эффективной средой с проницаемостью ϵ_{eff} . То есть, в отличие от (IV.50), снаружи частицы находится

не среда 1, не среда 2, а что-то среднее. Значение ε_{eff} определим самосогласованно. Среднее поле равняется

$$\langle E \rangle = f_1 E_1 + f_2 E_2 = f_1 \frac{3\varepsilon_1 \langle E \rangle}{\varepsilon_{\text{eff}} + 2\varepsilon_1} + f_2 \frac{3\varepsilon_2 \langle E \rangle}{\varepsilon_{\text{eff}} + 2\varepsilon_2}, \quad (\text{IV.84})$$

где для каждого из материалов 1 и 2 мы воспользовались (I.62), считая что снаружи — эффективная среда с полем $\langle E \rangle$ (а не среда 2 и 1, как в приближении Максвелл-Гарнетта).

Отсюда находим

$$f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_{\text{eff}} + 2\varepsilon_1} + f_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_{\text{eff}} + 2\varepsilon_2} = 0 \quad (\text{IV.85})$$

и получаем итоговый результат

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{1}{4}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2}), \quad \gamma = \varepsilon_1(3f_1 - 1) + \varepsilon_2(3f_2 - 1). \quad (\text{IV.86})$$

На рис. 59 представлено сравнение расчета по трем эффективным моделям: Максвелл-Гарнетт с шарами 1 в матрице 2 (красная кривая), Максвелл-Гарнетт с шарами 2 в матрице 1 (синяя кривая), и Бруггеман (черная кривая). Видно, что расчет по формуле Бруггемана лежит между двумя расчетами по формуле Максвелл-Гарнетта и переходит в одну из них при $f_1 \ll 1$ и $f_2 \ll 1$, соответственно. Существует математическая теорема (т.н. вилка Хашина-Штрикмана, Hashin-Shtrikman bounds), что для любой диэлектрической среды без потерь эффективная проницаемость ограничена этими двумя моделями, т.е.

$$\varepsilon_2 \frac{1 + 2f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}}{1 - f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}} \leq \varepsilon_{\text{eff}} \leq \varepsilon_1 \frac{1 + 2f_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}}{1 - f_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}} \text{ при } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2. \quad (\text{IV.87})$$

При этом все три кривые выпуклы вниз и лежат ниже линейной интерполяции $\varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2$. Это связано с тем, что проникновение поля в среду 1 с большой проницаемостью $\varepsilon_1 = 10 \gg \varepsilon_2$ подавлено.

Поскольку проводимость и диэлектрическая проницаемость линейно связаны, такую же формулу можно написать и для эффективной проводимости смеси двух сред,

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{1}{4}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\sigma_1\sigma_2}), \quad \gamma = \sigma_1(3f_1 - 1) + \sigma_2(3f_2 - 1). \quad (\text{IV.88})$$

Эта формула становится особенно интересной, для смеси проводника и диэлектрика, когда $\sigma_2 = 0$. Получаем

$$\sigma_{\text{eff}} = \begin{cases} 0, & 0 < f_1 < \frac{1}{3}, \\ \sigma_1 \frac{(3f_1 - 1)}{2}, & \frac{1}{3} < f_1 < 1. \end{cases} \quad (\text{IV.89})$$

Тем самым, мы получили *порог перколяции* при $f_1 = 1/3$: смесь становится проводящей лишь если объемная доля проводящей фазы превосходит критическое значение.

Ключевая мысль данного раздела: моделями эффективной среды нужно пользоваться с осторожностью. Разные модели дают разные ответы. Все очень зависит от того, как конкретно распределены материалы 1 и 2 в пространстве.

Д. За рамками эффективной среды

Не всегда распространение волны в случайной среде можно описывать в рамках модели эффективной среды. Помимо когерентного распространения, когда волна чувствует среду в среднем, может происходить и диффузное рассеяние. Помимо диффузного распространения существуют интерференционные эффекты, при которых проявляются волновые свойства света, например, *когерентное рассеяние назад*.

Распространение волны в среде можно рассматривать, как совокупность различных актов многократного рассеяния, так что рассеянное поле равняется

$$\mathbf{E}_{\text{scat}} = \sum_j \mathbf{E}_j, \quad (\text{IV.90})$$

$$|E_{\text{scat}}|^2 = \sum_j |\mathbf{E}_j|^2 + \sum_{j \neq j'} \text{Re } E_j E_j^* \quad (\text{IV.91})$$

где \mathbf{E}_j — амплитуда, характеризующие различные способы рассеяться на частицах среды. Каждый из вкладов \mathbf{E}_j содержит свою фазовую экспоненту, $\mathbf{E}_j \propto e^{iqL_j}$, где L_j — длина соответствующей траектории. Поскольку разные траектории имеют разные длины, то можно ожидать, что $\sum_{j \neq j'} E_j E_j^*$ обращается в ноль, и интенсивность рассеянной волны определяется лишь суммой квадратов моделей амплитуд, т.е. первым слагаемым в (IV.91). Это означает, что свет распространяется в среде как частица, и интерференционные эффекты не важны.

Однако, это не всегда так. Существуют условия, когда интерференционные эффекты проявляются. В частности, всегда будут конструктивно интерферировать пути, соответствующие обходу одной и той же группы рассеивателей в противоположном порядке, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ на рис. 60(а). Фазы и амплитуды, набираемые волной на этих путях, в точности совпадают. Интерференция таких траекторий приведет к усилению рассеяния назад, максимум — в два раза. Действительно, если есть всего два одинаковых пути обхода, то без учета интерференции $|E_{\text{scat}}|^2 = 2|E|^2$, а с учетом — $|E_{\text{scat}}|^2 = |2E|^2 = 4|E|^2$.

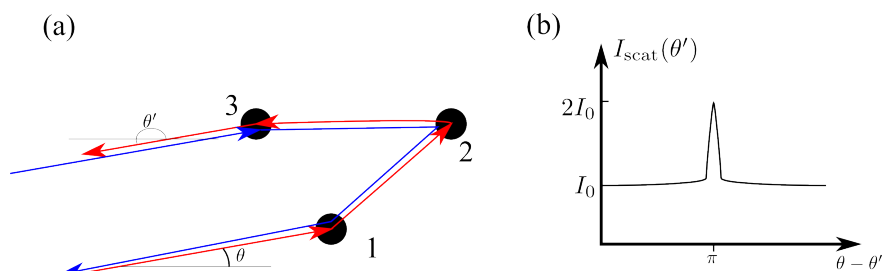


Рис. 60 (а) Два интерферирующих пути рассеяния света в неупорядоченной среде, приводящих к когерентному рассеянию назад. (б) Зависимость интенсивности рассеянного света от разницы углов распространения падающего света и рассеянного.

Поэтому в диаграмме рассеяния будет пик, соответствующий волнам, распространяющимся противоположно падающей (не путать с зеркальным отражением).

Эффект усиления рассеяния назад проявляется и для света и для электронов в различных неупорядоченных средах. По всей видимости первая теоретическая работа: [Ю. Н. Гнедин and А. З. Долгинов, “Теория многократного рассеяния”, *ЖЭТФ* **45**, 1136 (1964)]. Пример экспериментальной работы [E. Akkermans, P. E. Wolf and R. Maynard “Coherent Backscattering of Light by Disordered Media: Analysis of the Peak Line Shape”, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1471-1474 (1986)].

По-видимому, впервые эффект усиления рассеяния назад был обнаружен немецким астрономом Хуго фон Зелигером при изучении колец Сатурна. Кольца видны наиболее ярко в том случае, когда Земля расположена между солнцем и Сатурном, см. рис. 61. Зелигер объяснил этот эффект классически, за счет пропадания теней. Действительно, если освещать неровную поверхность под острым углом, то ее большая часть будет казаться затененной. А если освещать сверху, то теней будет меньше, т.к. источник будет расположен в зените. По более современным представлениям вклад от механизма когерентного рассеяния назад оказывается сильнее, [Bruce W. Napke, Robert M. Nelson and William D. Smythe, *Science* **260**, 509-511 (1993)], см. также введение статьи [Y. Shkuratov et al., *Icarus* **141**, 132 - 155 (1999)].

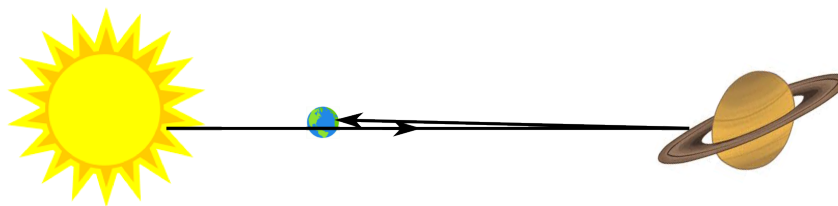


Рис. 61 Эффект Зелигера — увеличение яркости колец Сатурна в геометрии обратного отражения